

Applied Stochastic Processes 应用随机过程

陈大岳, 章复熹

Solution Manual

Twist Shan

Version 3.1, June 8, 2026

Basic Information

- This solution manual is written because the new edition of the book has no official answers, and the course itself can be quite demanding—a combination of subtle reasoning, clever constructions, and technical tricks makes it a real intellectual challenge.
- I hope this manual serves as a helpful reference for fellow students navigating the same journey. If you happen to spot any mistakes or inaccuracies, your understanding and corrections are sincerely appreciated.
- **Email:** twistsl@stu.pku.edu.cn, twistshan1218@gmail.com



Reference 1: 应用随机过程, 陈大岳, 章复熹

This box is used to highlight the problem statements in the solution manual. It serves as a clear visual cue to distinguish each exercise from the solution.

This box is used to present important lemmas, intermediate results, or boxed derivations that assist in solving the exercises.

This box is used to provide additional explanations, insights, or clarifying comments about the problem or solution.

Contents

1 马氏链	1
1.1 定义与例子	1
1.2 不变分布与可逆分布	8
1.3 状态的分类	14
1.4 首达时与强马氏性	16
1.5 常返性	20
1.6 击中概率	21
1.7 格林函数	27
1.8 遍历定理与正常返	35
1.9 强遍历定理	45
1.10 收敛速度	50
1.11 分支过程	52
1.12 综合练习题	59
2 跳过程	68
2.1 泊松过程	68
2.2 跳过程的定义及其转移概率	78
2.3 常返	92
2.4 正常返与不变分布	98
2.5 逆过程与可逆分布	108
2.6 连续时间马氏链	110
3 布朗运动	111
3.1 高斯分布与高斯过程	111
3.2 布朗运动的定义与莱维构造	112
3.3 不变原理概述	118
3.4 布朗轨道的性质	119
3.5 位势理论	129
3.6 布朗桥与 O-U 过程	132
3.7 随机积分与随机微分方程简介	139
4 jdq 往年题	142
4.1 2019 秋期末	142
4.2 2022 秋期末	149
4.3 2023 春第一次小测	153
4.4 2023 春第二次小测	156
4.5 2024 秋期末	160
4.6 2025 秋期末	165
4.7 2026 春第一次小测	169
4.8 2026 春第二次小测	170

1 马氏链

1.1 定义与例子

1. 假设 X_0, X_1, X_2, \dots 独立同分布, X_0 是离散型随机变量, 分布为 μ 。证明 $\{X_n\}$ 是马氏链, 并求其转移概率。

Proof. 要证明 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个马氏链, 我们需要验证其是否满足马尔可夫性, 即对于任意时刻 $n \geq 0$ 和任意状态 i_0, \dots, i_n, j , 下式恒成立:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

由于随机变量序列 $\{X_k\}_{k \geq 0}$ 是相互独立的, 所以随机变量 X_{n+1} 的结果与它之前的任何随机变量 $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ 的取值都无关。因此, 对于上式等号的左边, 我们有:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j)$$

同理, 对于等号的右边, 由于 X_{n+1} 与 X_n 相互独立, 我们有:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j)$$

因此 $\{X_n\}$ 是一个马氏链。

接下来求解一步转移概率 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ 。根据已证明的独立性:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j)$$

又由序列 $\{X_k\}$ 是同分布的, 共同分布为 μ 。设状态 j 的概率为 μ_j , 则该马氏链的转移概率为: $p_{ij} = \mu_j$ \square

2. 假设 $\{S_n\}$ 是一维简单随机游动。对任意 $n \geq 0$, 令 $X_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$ 。试问: $\{X_n\}$ 是马氏链吗? 请证明你的结论。

Proof. 我们通过构造反例来证明。设 $\{S_n\}$ 为一维简单对称随机游动, $S_0 = 0$ 。我们来比较以下两个概率:

$$P(X_4 = 2 | X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 0) \quad \text{和} \quad P(X_4 = 2 | X_3 = 1)$$

1. **计算第一个概率:** 条件 $\{X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 0\}$ 发生, 当且仅当随机游动路径为 $(S_0, S_1, S_2, S_3) = (0, -1, 0, 1)$ 。在此条件下, 我们有 $S_3 = 1$ 。要使 $X_4 = \max(X_3, S_4) = 2$, 必须有 $S_4 = S_3 + \xi_4 = 1 + \xi_4 = 2$, 即 $\xi_4 = 1$ 。因此,

$$P(X_4 = 2 | X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 0) = P(\xi_4 = 1) = \frac{1}{2}$$

2. **计算第二个概率:** 考虑条件 $\{X_3 = 1\}$ 。满足此条件的长度为 3 的随机游动路径共有 3 条, 每条的概率均为 $(1/2)^3 = 1/8$ 。它们分别是:

- 路径 A: $(0, 1, 0, 1)$, 其终点 $S_3 = 1$ 。
- 路径 B: $(0, 1, 0, -1)$, 其终点 $S_3 = -1$ 。
- 路径 C: $(0, -1, 0, 1)$, 其终点 $S_3 = 1$ 。

事件 $\{X_4 = 2, X_3 = 1\}$ 发生, 当且仅当 $X_3 = 1$ 且 $S_4 = 2$ 。这要求 $S_3 = 1$ 且 $\xi_4 = 1$ 。在上述三条路径中, 只有 A 和 C 满足 $S_3 = 1$ 。因此, $P(X_4 = 2, X_3 = 1) = P(\text{路径 A 或 C}) \times P(\xi_4 = 1) = (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 。而 $P(X_3 = 1) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ 。所以,

$$P(X_4 = 2 | X_3 = 1) = \frac{P(X_4 = 2, X_3 = 1)}{P(X_3 = 1)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$$

由于 $1/2 \neq 1/3$, 该过程不满足马尔可夫性, 故 $\{X_n\}$ 不是马氏链。 \square

3. 某数据通信系统由 n 个中继站组成, 从上一站向下一站传送信号 0 或 1 时, 接收的正确率为 p 。现用 X_0 表示初始站发出的数字, 用 X_k 表示第 k 个中继站接收到的数字。

(1) 写出 $\{X_k : 0 \leq k \leq n\}$ 的转移概率。

(2) 求

$$P(X_0 = 1 | X_n = 1) = \frac{\alpha + \alpha(p - q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p - q)^n},$$

其中 $\alpha = P(X_0 = 1), q = 1 - p$ 。并解释上述概率的实际意义。

Proof. (1) 该过程的状态空间为 $S = \{0, 1\}$ 。从第 k 个站到第 $k + 1$ 个站, 信号被正确接收的概率为 p , 被错误接收 (0 变 1 或 1 变 0) 的概率为 $1 - p$ 。因此, 一步转移概率为:

$$\begin{aligned} p_{00} &= P(X_{k+1} = 0 | X_k = 0) = p \\ p_{01} &= P(X_{k+1} = 1 | X_k = 0) = 1 - p \\ p_{10} &= P(X_{k+1} = 0 | X_k = 1) = 1 - p \\ p_{11} &= P(X_{k+1} = 1 | X_k = 1) = p \end{aligned}$$

写成转移矩阵形式为 (令 $q = 1 - p$):

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

(2) 我们要求的是后验概率 $P(X_0 = 1 | X_n = 1)$ 。根据贝叶斯公式:

$$P(X_0 = 1 | X_n = 1) = \frac{P(X_n = 1 | X_0 = 1)P(X_0 = 1)}{P(X_n = 1)}$$

其中 $P(X_0 = 1) = \alpha$ 。我们需要计算 n 步转移概率矩阵 P^n 。

通过对转移矩阵 P 进行谱分解 (对角化) 可以求得 P^n 。 P 的特征值为 $\lambda_1 = p + q = 1$ 和 $\lambda_2 = p - q$ 。对应的特征向量为 $v_1 = (1, 1)^T$ 和 $v_2 = (1, -1)^T$ 。由此可得 n 步转移矩阵为:

$$P^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (p - q)^n & 1 - (p - q)^n \\ 1 - (p - q)^n & 1 + (p - q)^n \end{pmatrix}$$

从矩阵中可以读出:

$$\begin{aligned} P(X_n = 1 | X_0 = 1) &= p_{11}^{(n)} = \frac{1}{2}(1 + (p - q)^n) \\ P(X_n = 1 | X_0 = 0) &= p_{01}^{(n)} = \frac{1}{2}(1 - (p - q)^n) \end{aligned}$$

利用全概率公式计算分母 $P(X_n = 1)$:

$$\begin{aligned} P(X_n = 1) &= P(X_n = 1 | X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_n = 1 | X_0 = 0)P(X_0 = 0) \\ &= \frac{1}{2}(1 + (p - q)^n)\alpha + \frac{1}{2}(1 - (p - q)^n)(1 - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}[\alpha + \alpha(p - q)^n + 1 - (p - q)^n - \alpha + \alpha(p - q)^n] \\ &= \frac{1}{2}[1 + (2\alpha - 1)(p - q)^n] \end{aligned}$$

现在代入贝叶斯公式:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1 | X_n = 1) &= \frac{\frac{1}{2}(1 + (p - q)^n) \cdot \alpha}{\frac{1}{2}[1 + (2\alpha - 1)(p - q)^n]} \\ &= \frac{\alpha(1 + (p - q)^n)}{1 + (2\alpha - 1)(p - q)^n} = \frac{\alpha + \alpha(p - q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p - q)^n} \end{aligned}$$

实际意义: 这个概率表示, 在“第 n 个中继站接收到的信号是 1”这一观测结果下, 我们推断出“初始站发出的信号原本就是 1”的置信度。它是在已知最终输出的情况下, 对未知信号源的后验概率。

□

4. 在例 1.1.9 中, 记 $Y_n = n - S_{u_n}$, 其中 $u_n = \sup\{u : S_u \leq n\}$ 。它为时刻 n 与它左边最近的更新时刻之间的距离, 即时刻 n 正在用的那个灯泡已经使用的时间。特别地, 若 n 为更新时刻, 则 $Y_n = 0$ 。证明 $\{Y_n\}$ 是马氏链, 并求其转移概率。(注: 称 $\{Y_n\}$ 为老化过程。)

例 1.1.9 (更新过程): 设灯泡寿命 L_1, L_2, \dots 独立同分布于 $L \in \mathbb{Z}_+$ 。更新时刻为 $S_0 = 0, S_n = \sum_{r=1}^n L_r$ 。

- 余寿过程 $X_n = S_{r_n} - n$, 其中 $r_n = \inf\{r : S_r \geq n\}$ 。
- 转移概率: $p_{i,i-1} = 1 (i \geq 1); p_{0,i} = P(L = i + 1) (i \geq 0)$ 。

Proof. 首先, 我们严格证明 $\{Y_n\}$ 的马尔可夫性。

设历史为 $\mathcal{H}_n = \{Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n\}$ 。我们需要证明 $P(Y_{n+1} = j | \mathcal{H}_n) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i_n)$ 。

设 L_1, L_2, \dots 是各组件的独立同分布的寿命, 其共同分布等价于随机变量 L 。设 $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$ 是更新时刻序列, 即 $t_k = \sum_{m=1}^k L_m$ 。事件 \mathcal{H}_n 包含了到时刻 n 为止的所有组件的完整寿命信息, 除了当前正在使用的这一个。假设在区间 $[0, n]$ 内共发生了 $c-1$ 次更新, 第 c 个组件正在使用中。那么历史 \mathcal{H}_n 等价于以下事件:

- 第 1 个组件的寿命 $L_1 = t_1 - t_0$
- ...
- 第 $c-1$ 个组件的寿命 $L_{c-1} = t_{c-1} - t_{c-2}$
- 第 c 个组件已经存活的时间为 i_n , 即其寿命 $L_c > i_n$ 。

我们以 $Y_{n+1} = 0$ (发生更新) 为例进行推导:

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = 0 | \mathcal{H}_n) &= \frac{P(Y_{n+1} = 0 \cap \mathcal{H}_n)}{P(\mathcal{H}_n)} \\ &= \frac{P(L_1 = t_1, \dots, L_{c-1} = t_{c-1} - t_{c-2}, L_c = i_n + 1)}{P(L_1 = t_1, \dots, L_{c-1} = t_{c-1} - t_{c-2}, L_c > i_n)} \end{aligned}$$

由于各 L_k 相互独立, 联合概率等于概率的乘积:

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = 0 | \mathcal{H}_n) &= \frac{P(L_1 = t_1) \cdots P(L_{c-1} = t_{c-1} - t_{c-2}) \cdot P(L_c = i_n + 1)}{P(L_1 = t_1) \cdots P(L_{c-1} = t_{c-1} - t_{c-2}) \cdot P(L_c > i_n)} \\ &= \frac{P(L_c = i_n + 1)}{P(L_c > i_n)} \end{aligned}$$

因为所有 L_k 同分布, 上式等于 $\frac{P(L=i_n+1)}{P(L>i_n)} = P(L = i_n + 1 | L > i_n)$ 。这恰好是 $P(Y_{n+1} = 0 | Y_n = i_n)$ 的定义。同理可证 $P(Y_{n+1} = i_n + 1 | \mathcal{H}_n) = P(Y_{n+1} = i_n + 1 | Y_n = i_n)$ 。因此, 过程 $\{Y_n\}$ 满足马尔可夫性。

接下来求解其一步转移概率 $p_{ij} = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i)$ 。

- **转移到 $i+1$:** 当 $j = i+1$ 时, 转移发生当且仅当年龄为 i 的组件在下一个时间单位存活。

$$p_{i,i+1} = P(L > i + 1 | L > i) = \frac{P(L > i + 1)}{P(L > i)}$$

其中 $i \geq 0$ 。我们约定 $P(L > 0) = 1$ 。

- **转移到 0:** 当 $j = 0$ 时, 转移发生当且仅当年龄为 i 的组件在下一个时间单位失效。

$$p_{i,0} = P(L = i + 1 | L > i) = \frac{P(L = i + 1)}{P(L > i)}$$

- 对于所有其他的 $j \neq i+1$ 且 $j \neq 0$, 转移概率 $p_{ij} = 0$ 。

因为 $P(L > i) = P(L = i + 1) + P(L > i + 1)$, 所以 $p_{i,i+1} + p_{i,0} = 1$, 这符合概率要求。 \square

注: 更新过程引发的两类型离散时间马氏链

虽然计数过程 $\{N_n\}_{n \geq 0}$ 通常不具备马氏性, 但我们可以通过引入“年龄”或“余命”作为状态, 构建两个重要的马氏链:

- **老化过程 (Aging Process / Age):** $\{Y_n\}$, 其中 $Y_n = n - S_{u_n}$ 。物理意义: 代表在时刻 n , 当前组件已经使用的时间 (年龄)。其状态空间为 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 。

- **剩余寿命过程 (Residual Life / Excess Time):** $\{X_n\}$, 其中 $X_n = S_{u_{n+1}} - n$ 。物理意义: 代表在时刻 n , 当前组件距离下一次失效还剩下的时间。

这两个过程的巧妙之处在于: 它们捕捉了系统演化所需的全部历史信息 (即“当前组件的状态”), 从而将原本不具备无记忆性的计数系统转化为了马氏框架下的随机模型。

5. 某篮球运动员投篮成功的概率取决于他前两次的投篮成绩。如果前两次都成功, 则投篮成功的概率为 $3/4$; 如果前两次都失败, 则投篮成功的概率为 $1/2$; 如果前两次投篮中只有一次成功和一次失败, 则成功的概率为 $2/3$ 。

- (1) 试用马氏链来刻画该运动员连续投篮的过程。
- (2) 将他第 n 次投篮成功的概率记为 p_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 。

Proof. (1) 设 S 为成功, F 为失败。由于第 k 次投篮结果依赖于前两次, 我们定义状态为 $Z_k = (X_{k-1}, X_k)$ 。状态空间为:

$$S = \{\text{状态 1: (S, S), 状态 2: (S, F), 状态 3: (F, S), 状态 4: (F, F)}\}$$

根据题意, 从状态 (X_{k-2}, X_{k-1}) 转移到 (X_{k-1}, X_k) 的一步转移矩阵 P 为:

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (2) 根据 Perron-Frobenius 定理, 矩阵 P 存在一个唯一的、各分量为正的左特征向量, 对应于最大特征值 $\lambda = 1$ 。我们将此向量归一化后称为佩隆向量 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$, 它满足方程组 $\pi P = \pi$ 且 $\sum \pi_i = 1$ 。

解此线性方程组可得佩隆向量为:

$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8} \right)$$

该向量描述了系统在长时间运行后, 处于各个状态的概率。因此, 我们可以用全概率公式计算长期的成功概率。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \sum_{i=1}^4 P(\text{成功} | Z_n = i) \cdot P(Z_n = i) \\ &= \pi_1 \cdot \frac{3}{4} + \pi_2 \cdot \frac{2}{3} + \pi_3 \cdot \frac{2}{3} + \pi_4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{6+2+2+1}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned} \quad \square$$

注: 后续课程中我们会学到, 本题求解的佩隆向量, 在马氏链理论中被称为不变分布 (或平稳分布)。遍历定理保证了, 对于满足某些条件的马氏链 (如本题), 系统在长时间演化后, 其状态分布会收敛到这个不变分布。因此, 我们可以用它来计算系统的长期平均行为。

本题也可以通过角化再求矩阵 n 次方的方法来求解近似, 但计算过程过于繁杂, 笔者无力计算。

6. 某车间最多可以安放 s 台机床。如果第 n 个星期开始上班时共有 $X_n = i$ 台机床可以使用, 车间主任就订购 $s - i$ 台新机床, 可于周末到货, 并于下星期开始上班时投入使用。而在这个星期中又有 Y_n 台车床报废, 因此 $X_{n+1} = s - Y_n$ 。假设

$$P(Y_n = j | X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = 1/(1+i), \quad j = 0, \dots, i.$$

- (1) 写出 $\{X_n\}$ 的转移概率。
- (2) 令 $a_n = \mathbb{E}X_n$ 。试给出序列 a_0, a_1, a_2, \dots 的递推式, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n$ 。

Proof. (1) 马氏链 X_n 的一步转移概率 p_{ij} 定义为:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(s - Y_n = j | X_n = i) = P(Y_n = s - j | X_n = i)$$

已知在 $X_n = i$ 的条件下, Y_n 在集合 $\{0, 1, \dots, i\}$ 上服从离散均匀分布, 即对于 $k \in \{0, 1, \dots, i\}$, 有 $P(Y_n = k | X_n = i) = \frac{1}{i+1}$.

因此, 当 $s - j \in \{0, 1, \dots, i\}$ (即 $s - i \leq j \leq s$) 时, $p_{ij} = \frac{1}{i+1}$; 否则为 0. 转移矩阵 P (状态空间为 $\{0, 1, \dots, s\}$) 为:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \cdots & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

(2) 令 $a_n = \mathbb{E}X_n$. 根据 $X_{n+1} = s - Y_n$, 有 $a_{n+1} = \mathbb{E}[s - Y_n] = s - \mathbb{E}Y_n$. 使用全期望公式 $\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_n | X_n]]$. 在 $X_n = i$ 的条件下, Y_n 在 $\{0, 1, \dots, i\}$ 上均匀分布, 其期望为 $\mathbb{E}[Y_n | X_n = i] = \frac{0+i}{2} = \frac{i}{2}$.

所以 $\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}[\frac{X_n}{2}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}X_n = \frac{a_n}{2}$.

可得递推关系为:

$$a_{n+1} = s - \frac{a_n}{2}$$

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 存在. 对递推式两边同时取极限, 得到 $A = s - \frac{A}{2}$.

解此方程: $\frac{3}{2}A = s \implies A = \frac{2s}{3}$. 即, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n = \frac{2s}{3}$. □

7. 假设某加油站给一辆车加油需要一个单位时间 (比如, 5 分钟). 令 ξ_n 是第 n 个单位时间来加油的汽车数. 假设 ξ_1, ξ_2, \dots 独立同分布, 取值非负整数, $P(\xi_1 = k) = p_k, k \geq 0$. 在任意时刻 n , 如果加油站有车, 那么加油站为其中一辆车加油 (耗时一个单位时间, 然后该汽车在时刻 $n+1$ 离开加油站); 否则, 加油站什么都不做. 将 n 时刻加油站中的汽车数记为 X_n . 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间与转移概率.

Proof. X_n 表示在时刻 n 加油站中的汽车数, 状态空间为所有非负整数:

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}$$

我们需要根据 X_n 的值分两种情况讨论 X_{n+1} 的变化.

1. 当 $X_n = 0$ 时:

如果时刻 n 加油站中没有车, 那么加油站什么都不做. 在下一个单位时间 $(n, n+1]$ 内, 有 ξ_{n+1} 辆新车到来. 因此, 时刻 $n+1$ 加油站中的汽车数 X_{n+1} 将直接等于新到的汽车数 ξ_{n+1} .

$$X_{n+1} = \xi_{n+1}$$

所以, 对于 $j \geq 0$, 转移概率为:

$$p_{0j} = P(X_{n+1} = j | X_n = 0) = P(\xi_{n+1} = j) = p_j$$

2. 当 $X_n = i > 0$ 时:

如果时刻 n 加油站中 i 辆车 ($i > 0$), 那么加油站会为其中一辆车加油. 这辆车会在时刻 $n+1$ 离开. 因此, 在新的汽车到来之前, 加油站里会剩下 $i-1$ 辆车. 接着, 在下一个单位时间 $(n, n+1]$ 内, 有 ξ_{n+1} 辆新车到来. 所以, 时刻 $n+1$ 加油站中的汽车数 X_{n+1} 将是 $i-1$ 加上新到的汽车数 ξ_{n+1} :

$$X_{n+1} = (i-1) + \xi_{n+1}$$

要使 $X_{n+1} = j$, 即 $(i-1) + \xi_{n+1} = j$, 这意味着新到的汽车数 ξ_{n+1} 必须为 $j - (i-1)$.

由于 ξ_{n+1} 是非负整数, 所以要求 $j - (i-1) \geq 0$.

所以, 对于 $i > 0$ 和 $j \geq i-1$, 转移概率为:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(\xi_{n+1} = j - i + 1) = p_{j-i+1}$$

对于 $j < i-1$, 转移概率 $p_{ij} = 0$. □

8. 一个粒子在三角形的三个顶点之间跳跃。它每一步独立地跳跃，按顺时针方向移动的概率为 $p \in (0, 1)$ ，按逆时针方向移动的概率为 $1 - p$ 。试求“ n 步之后该粒子恰好位于出发点”的概率 p_n ，并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 。

Proof. 由于粒子每一步独立地跳跃，且其下一步位置仅取决于当前位置，因此这是一个马氏链。

一步转移矩阵 P 为：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵是一个循环矩阵。由于马氏链具有循环对称性（从任一状态出发，经过 n 步回到出发点的概率是相同的），我们可以设 p_n 为从任意一个顶点（不失一般性，设为顶点 i ）出发，经过 n 步后仍回到该顶点 i 的概率，即 $p_n = p_{ii}^{(n)}$ 。根据矩阵理论，对于循环矩阵，所有对角线元素都相等，即 $p_{00}^{(n)} = p_{11}^{(n)} = p_{22}^{(n)}$ 。同时，矩阵的迹等于其特征值之和，即 $\text{Tr}(P^n) = \sum_{k=0}^2 \lambda_k^n$ 。因此，我们可以得到：

$$p_n = \frac{1}{3} \text{Tr}(P^n) = \frac{1}{3} (\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是转移矩阵 P 的特征值。

接下来计算特征值。特征方程为 $\det(P - \lambda I) = 0$ ：

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & p & 1-p \\ 1-p & -\lambda & p \\ p & 1-p & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(-\lambda)(-\lambda) - p(1-p) - p((1-p)(-\lambda) - p \cdot p) + (1-p)((1-p)p - (-\lambda)(1-p)) \\ &= -\lambda^3 + 3p(1-p)\lambda + 1 - 3p + 3p^2 = 0 \end{aligned}$$

该立方方程的根为：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} (2p - 1) \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} (2p - 1) \end{aligned}$$

由于 $p \in (0, 1)$ ，则 $(2p - 1) \in (-1, 1)$ 。所以， λ_2 和 λ_3 的模长为：

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2p-1)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(2p-1)^2}$$

由 $(2p - 1)^2 < 1$ ，所以 $\frac{3}{4}(2p - 1)^2 < \frac{3}{4}$ 。故 $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(2p - 1)^2 < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ 。所以 $|\lambda_2| < 1$ 且 $|\lambda_3| < 1$ 。

因此，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n)$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_3^n = 0$ 。得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{3} (1^n + 0 + 0) = \frac{1}{3} \quad \square$$

9. 设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ，转移矩阵 P 如下：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求：(1) P^2 ；(2) $p_{ii}^{(2n)}$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ 。

Proof. (1)

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(2) 注意到 P^2 是一个分块对角矩阵, 可写为:

$$P^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

于是 $P^{2n} = (P^2)^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$, 只需计算 A^n 、 B^n 的对角元素。

对矩阵 A 解特征多项式:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 0.35 - \lambda & 0.65 \\ 0.45 & 0.55 - \lambda \end{vmatrix} = (0.35 - \lambda)(0.55 - \lambda) - 0.65 \cdot 0.45 \\ &= \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.1925 - 0.2925 = \lambda^2 - 0.9\lambda - 0.1 \end{aligned}$$

解得特征值:

$$\lambda = \frac{0.9 \pm \sqrt{0.81 + 0.4}}{2} = \frac{0.9 \pm \sqrt{1.21}}{2} = \frac{0.9 \pm 1.1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -0.1$$

同理对 B 可得:

$$\det(B - \lambda I) = (0.3 - \lambda)(0.6 - \lambda) - 0.28 = \lambda^2 - 0.9\lambda - 0.1 \Rightarrow \text{特征值同样为 } 1, -0.1$$

因此, A^n 、 B^n 可以表示为两个幂的线性组合:

$$A^n = a_1 I + a_2 (-0.1)^n, \quad B^n = b_1 I + b_2 (-0.1)^n$$

即:

$$p_{ii}^{(2n)} = \text{常数项} + \text{振荡项} \cdot (-0.1)^n$$

设:

$$p_{11}^{(2n)} = a + b(-0.1)^n, \quad p_{33}^{(2n)} = c + d(-0.1)^n$$

代入已知:

$$\begin{cases} p_{11}^{(2)} = 0.35, & p_{11}^{(4)} = 0.415 \\ p_{33}^{(2)} = 0.3, & p_{33}^{(4)} = 0.37 \end{cases}$$

解得:

$$p_{11}^{(2n)} = \frac{77}{220} + \frac{13}{220}(-0.1)^n, \quad p_{33}^{(2n)} = \frac{33}{110} + \frac{7}{110}(-0.1)^n$$

同理, 最终可得:

$$\begin{aligned} p_{11}^{(2n)} &= \frac{7}{20} + \frac{13}{220} \cdot (-0.1)^n, & p_{22}^{(2n)} &= \frac{11}{20} - \frac{11}{220} \cdot (-0.1)^n \\ p_{33}^{(2n)} &= \frac{3}{10} + \frac{7}{110} \cdot (-0.1)^n, & p_{44}^{(2n)} &= \frac{7}{10} - \frac{7}{110} \cdot (-0.1)^n \end{aligned}$$

□

10*. 假设 P 是 S 上的转移矩阵, \hat{S} 是可数集, $f: S \rightarrow \hat{S}$ 是满射, 满足: 对所有 $i, i' \in S$, 若 $f(i) = f(i')$, 则

$$\sum_{j: f(j)=k} p_{ij} = \sum_{j: f(j)=k} p_{i'j}, \quad \forall k \in \hat{S}.$$

证明: 若 $\{X_n\}$ 是 S 上以 P 为转移矩阵的马氏链, 则 $\{f(X_n)\}$ 是 \hat{S} 上的马氏链。

Proof. 记 $Y_n = f(X_n)$ 。为证 $\{Y_n\}$ 是马氏链, 我们需证明 $P(Y_{n+1} = k | Y_n = l, Y_{n-1} = t_{n-1}, \dots, Y_0 = t_0)$ 的值仅依赖于 k 和 l 。

为简洁, 记历史事件为 $\mathcal{H}_n = \{Y_n = l, Y_{n-1} = t_{n-1}, \dots, Y_0 = t_0\}$ 。

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = k | \mathcal{H}_n) &= \sum_{i \in S} P(Y_{n+1} = k | X_n = i, \mathcal{H}_n) P(X_n = i | \mathcal{H}_n) \\ &= \sum_{i: f(i)=l} P(Y_{n+1} = k | X_n = i, \mathcal{H}_n) P(X_n = i | \mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

上式第二步是因为 \mathcal{H}_n 包含了 $Y_n = l$ (即 $f(X_n) = l$) 的信息, 因此若 $f(i) \neq l$, 则 $P(X_n = i | \mathcal{H}_n) = 0$ 。

由于 $\{X_n\}$ 是马氏链, $Y_{n+1} = f(X_{n+1})$ 的分布仅依赖于 X_n :

$$P(Y_{n+1} = k | X_n = i, \mathcal{H}_n) = P(f(X_{n+1}) = k | X_n = i) = \sum_{j: f(j)=k} p_{ij}$$

根据题设条件, 对于所有满足 $f(i) = l$ 的 i , 上式的值是一个与 i 无关的常数。我们记这个常数为 q_{lk} 。

$$q_{lk} := \sum_{j: f(j)=k} p_{ij} \quad \text{对所有 } i \text{ 使得 } f(i) = l$$

代入原式, 可将常数 q_{lk} 提出:

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = k | \mathcal{H}_n) &= \sum_{i: f(i)=l} q_{lk} \cdot P(X_n = i | \mathcal{H}_n) \\ &= q_{lk} \sum_{i: f(i)=l} P(X_n = i | \mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

最后的求和项是在给定 \mathcal{H}_n 的条件下, X_n 取遍所有映射到 l 的的状态的概率之和, 即 $P(f(X_n) = l | \mathcal{H}_n)$ 。由于 \mathcal{H}_n 本身就包含 $Y_n = l$ 的条件, 此概率为 1。

因此,

$$P(Y_{n+1} = k | Y_n = l, Y_{n-1} = t_{n-1}, \dots, Y_0 = t_0) = q_{lk}.$$

该结果仅依赖于 l 和 k , 与更早的历史无关。故 $\{Y_n\} = \{f(X_n)\}$ 是一个马氏链, 其转移概率为 $\hat{p}_{lk} = q_{lk}$ 。 \square

注: 集总性 (Lumpability)

本题证明的性质被称为马氏链的**集总性**。如果一个马氏链的状态空间可以被划分成若干个不相交的子集, 并且从任何一个子集中的任何一个状态出发, 转移到另一个确定子集的总概率是相同的, 那么我们就可以将这些子集“集总”成新的状态, 形成一个新的、更小的马氏链。这个过程在模型简化中非常有用。本题中的函数 f 正是起到了划分状态空间的作用, 每个 $l \in \hat{S}$ 对应一个状态子集 $\{i \in S | f(i) = l\}$ 。

1.2 不变分布与可逆分布

1. 通过解方程直接求如下转移矩阵的不变分布:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. 设不变分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ 。由不变分布的定义知 $\pi \mathbf{P} = \pi$, 且满足归一化条件 $\sum_{i=0}^5 \pi_i = 1$ 。方程组 $\pi(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ 等价于其转置形式 $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\pi^T = \mathbf{0}$, 对应的增广矩阵 (省略全零列) 为:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -5/6 & 1/2 & 0 & 0 & 3/8 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/2 & -7/8 \end{pmatrix}$$

继续化简可得:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5/9 & 5/6 & -13/12 \\ 0 & 0 & -1 & -1/9 & -1/3 & 7/12 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 1/3 & -7/12 \\ 0 & 0 & 0 & 11/18 & 2/3 & 18/24 \\ 0 & 0 & 0 & -17/18 & 1/3 & 13/24 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

通过回代求解，可得各状态概率关于 π_5 的比例关系：由 $\frac{45}{18}\pi_3 = \frac{45}{24}\pi_5$ 得 $\pi_3 = \frac{3}{4}\pi_5$ ；同时易得 $\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_5$ 。代入先前方程可得：

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_5, \quad \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_5, \quad \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_5.$$

利用归一化条件 $\sum_{i=0}^5 \pi_i = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1)\pi_5 = 4\pi_5 = 1$ ，解得 $\pi_5 = \frac{1}{4}$ 。由此得到不变分布为：

$$\pi = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \quad \square$$

2. 证明：若 π 为不变分布，则对任意 $A \subseteq S$ ，(1.2.2) 式成立：

$$\sum_{i \notin A, j \in A} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in A, j \notin A} \pi_i p_{ij}.$$

Proof. 由不变性方程 $\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji}$ ，对任意 $i \in A$ ：

$$\pi_i = \sum_{j \in A} \pi_j p_{ji} + \sum_{j \notin A} \pi_j p_{ji}$$

利用 $\pi_i = \pi_i \sum_{j \in S} p_{ij} = \pi_i (\sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij})$ 进行移项，得：

$$\pi_i \sum_{j \notin A} p_{ij} = \sum_{j \notin A} \pi_j p_{ji} + \left(\sum_{j \in A} \pi_j p_{ji} - \pi_i \sum_{j \in A} p_{ij} \right)$$

对所有 $i \in A$ 求和：

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} \pi_j p_{ji} + \underbrace{\sum_{i \in A} \left(\sum_{j \in A} \pi_j p_{ji} - \pi_i \sum_{j \in A} p_{ij} \right)}_{=0}$$

其中大括号项由于 $\sum_{i \in A} \sum_{j \in A} \pi_j p_{ji} = \sum_{j \in A} \pi_j \sum_{i \in A} p_{ji} = \sum_{i \in A} \pi_i \sum_{j \in A} p_{ij}$ 而抵消。故得：

$$\sum_{i \in A, j \notin A} \pi_i p_{ij} = \sum_{j \notin A, i \in A} \pi_j p_{ji} \quad \square$$

即流入概率等于流出概率。

3. 设 $\{X_n\}$ 是取值于 \mathbb{Z}_+ 的马氏链，转移概率为

$$p_{01} = 1 - p_{00} = q, \quad p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = p, \quad \forall i = 1, 2, \dots,$$

其中 $0 < q \leq 1, 0 < p < 1$ 。当 $p < 1/2$ 时，求不变分布 π 并计算 $E_\pi X_{100}$ 。（注：当 $q = 1$ 时，称 $\{X_n\}$ 为 \mathbb{Z}_+ 上的带反射壁的随机游动；当 $q = 0$ 时，称 $\{X_n\}$ 为 \mathbb{Z}_+ 上的带吸收壁的随机游动；当 $0 < q < 1$ 时，称 $\{X_n\}$ 为 \mathbb{Z}_+ 上的带黏滞边界的随机游动。）

Proof. 不妨取集合 $A = \{i, i+1, \dots\}$ ，对 $i = 1, 2, \dots$ ，利用流入流出平衡原理：

$$\sum_{i \notin A, j \in A} \pi_i p_{ij} = \pi_{i-1} p_{i-1,i} = \pi_{i-1} p$$

$$\sum_{i \in A, j \notin A} \pi_i p_{ij} = \pi_i p_{i,i-1} = \pi_i (1-p)$$

其中特殊地，当 $i = 1$ 时，有 $\pi_0 q = \pi_1 (1-p)$ 。由不变分布性质，有 $\pi_i (1-p) = \pi_{i-1} p$ ，即 $\pi_i = \frac{p}{1-p} \pi_{i-1}$ 对于 $i \geq 2$ 成立。结合初始项，得：

$$\pi_i = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{i-1} \cdot \frac{q}{1-p} \pi_0, \quad i \geq 1$$

由归一化条件 $\sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i = 1$:

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{i-1} \cdot \frac{q}{1-p} \pi_0 = 1$$

由于 $p < 1/2$, 则 $\frac{p}{1-p} < 1$, 级数收敛。解得:

$$\pi_0 = \frac{1-2p}{1-2p+q}, \quad \pi_i = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{i-1} \frac{q}{1-p} \frac{1-2p}{1-2p+q} \quad (i \geq 1)$$

为求 $E_{\pi} X_{100}$, 注意到在平稳分布下 $E_{\pi} X_{100} = E_{\pi} X_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot \pi_i$:

$$E_{\pi} X_{100} = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot \frac{q}{1-p} \cdot \frac{1-2p}{1-2p+q} \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^{i-1}$$

令 $S = \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{p}{1-p}\right)^{i-1}$, 利用错位相减法, 有 $(1 - \frac{p}{1-p})S = \frac{1}{1 - \frac{p}{1-p}}$:

$$S = \frac{(1-p)^2}{(1-2p)^2}$$

代入原式得:

$$E_{\pi} X_{100} = \frac{q(1-p)}{(1-2p)(1-2p+q)} \quad \square$$

4. 假设 $S = \{1, 2, 3\}$, 转移矩阵如下:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

求: (1) 不变分布; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$ 。

Proof. (1) 设不变分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 。由 $\pi \mathbf{P} = \pi$ 建立方程组:

$$\begin{cases} -0.4\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 = 0 & \text{--- (a)} \\ 0.3\pi_1 - 0.3\pi_2 + 0.3\pi_3 = 0 & \text{--- (b)} \\ 0.1\pi_1 + 0.1\pi_2 - 0.4\pi_3 = 0 & \text{--- (c)} \end{cases}$$

由 (b) 式立即得 $\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 = 0$, 即 $\pi_2 = \pi_1 + \pi_3$ 。将此关系代入 (a) 式:

$$-0.4\pi_1 + 0.2(\pi_1 + \pi_3) + 0.1\pi_3 = 0 \implies -0.2\pi_1 + 0.3\pi_3 = 0 \implies \pi_1 = 1.5\pi_3$$

由此可得比例关系:

$$\pi_1 = \frac{3}{2}\pi_3, \quad \pi_2 = \frac{3}{2}\pi_3 + \pi_3 = \frac{5}{2}\pi_3$$

利用归一化条件 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$:

$$\frac{3}{2}\pi_3 + \frac{5}{2}\pi_3 + \pi_3 = 1 \implies 5\pi_3 = 1 \implies \pi_3 = 0.2$$

解得不变分布为:

$$\pi = (0.3, 0.5, 0.2)$$

(2) 记极限转移矩阵为 $\mathbf{P}_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ 。设初分布为 μ , 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = \mu^T \mathbf{P}_{\infty} [1] = \mu^T \mathbf{1}_n \pi^T [1] = \pi_1 = 0.3 \quad \square$$

注: 关于 $\mathbf{P}_{\infty} = \mathbf{1}_n \pi^T$ 的补充说明

首先, 有限状态的时齐马氏链的不变分布存在。又因为 $\mathbf{P}_{\infty} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_{\infty} = \mathbf{P}_{\infty}$, 意味着 \mathbf{P}_{∞} 的每一行都是 \mathbf{P} 的左特征向量 (对应特征值 1), 即每一行都是不变分布。而 $\mathbf{P}_{\infty} = \mathbf{1}_n \pi^T$ 正好满足这一条件。

5. 证明：转移矩阵 \mathbf{P} 的全体不变分布构成凸集，即若 μ, π 都是 \mathbf{P} 的不变分布， $0 < p < 1$ ，则 $p\mu + (1-p)\pi$ 也是 \mathbf{P} 的不变分布。

Proof. 由 μ, π 是不变分布知 $\mu\mathbf{P} = \mu$ 且 $\pi\mathbf{P} = \pi$ 。则：

$$(p\mu + (1-p)\pi)\mathbf{P} = p\mu\mathbf{P} + (1-p)\pi\mathbf{P} = p\mu + (1-p)\pi$$

且满足归一化条件：

$$\sum_{i \in S} (p\mu_i + (1-p)\pi_i) = p \sum_{i \in S} \mu_i + (1-p) \sum_{i \in S} \pi_i = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1 = 1$$

由于 $p > 0, 1-p > 0$ 且 $\mu_i, \pi_i \geq 0$ ，故新分布的每个元素非负，即 $p\mu + (1-p)\pi$ 仍为不变分布。 \square

6. 假设 π 是不变分布， i, j 是两个状态。假设存在常数 $c > 0$ ，使得对任意状态 k ， $p_{ki} = cp_{kj}$ 。证明： $\pi_i = c\pi_j$ 。

Proof. 由 π 的不变性 $\pi = \pi\mathbf{P}$ ，考察状态 i 的分量：

$$\pi_i = \sum_{k \in S} \pi_k p_{ki}$$

代入已知条件 $p_{ki} = cp_{kj}$ ：

$$\pi_i = \sum_{k \in S} \pi_k (cp_{kj}) = c \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} = c\pi_j$$

\square

7. 若转移矩阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{S \times S}$ 满足 $\sum_{i \in S} p_{ij} = 1$ ，则称 \mathbf{P} 为双重随机的 (double stochastic)。证明：

- (1) 若 \mathbf{P} 是双重随机的，则对任何 n ， \mathbf{P}^n 也是双重随机的；
- (2) 若 \mathbf{P} 是双重随机的，则 $\mu \equiv 1$ 是其不变测度。

Proof. (1) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为双重随机矩阵。考察其乘积 \mathbf{AB} 的列和：

$$\sum_{j \in S} (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k \in S} b_{ki} \left(\sum_{j \in S} a_{jk} \right)$$

由于 \mathbf{A} 是双重随机的， $\sum_{j \in S} a_{jk} = 1$ ，故：

$$\sum_{j \in S} (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k \in S} b_{ki} \cdot 1 = 1$$

即 \mathbf{AB} 也是双重随机矩阵。由数学归纳法推知 \mathbf{P}^n 均为双重随机。

(2) 取 $\mu_i = 1, \forall i \in S$ 。考察 $\mu\mathbf{P}$ 的第 j 个分量：

$$(\mu\mathbf{P})_j = \sum_{i \in S} \mu_i p_{ij} = \sum_{i \in S} 1 \cdot p_{ij}$$

根据双重随机矩阵列和为 1 的定义，上式等于 1。故 $\mu\mathbf{P} = \mu$ 。由于 $\mu_i > 0$ ，故 $\mu \equiv 1$ 是 \mathbf{P} 的不变测度。 \square

8. 假设 S 有限， \mathbf{P} 是 S 上的转移矩阵。固定 $i \in S$ 。证明：

(1) 存在正整数的子列 n_1, n_2, \dots ，使得对任意状态 j ，极限

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)} \right) / n_r$$

存在，将此极限记为 π_j ；

(2) $\{\pi_j : j \in S\}$ 是 \mathbf{P} 的不变分布。

Proof. (1) 对 \forall 状态 j , 有 $0 \leq \frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^{(m)}}{n} \leq 1$, 故序列 $\{\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^{(m)}\}_{n \geq 1}$ 有界。

由 Bolzano-Weierstrass 定理, 对于每一个 j , 都存在收敛子列。

由于 S 有限, 我们可以通过选取子列的子列 (对角线法则), 找到一个公共的子列 $\{n_r\}$, 使得对所有的 $j \in S$, 极限

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \pi_j \quad \text{存在。}$$

(2) 首先验证不变性:

$$\sum_{j \in S} \pi_j p_{jk} = \sum_{j \in S} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} \right) p_{jk} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ik}^{(m+1)}}{n_r}$$

注意级数求和的偏移:

$$\frac{\sum_{m=1}^{n_r} p_{ik}^{(m)}}{n_r} = \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ik}^{(m)} - p_{ik}^{(0)} + p_{ik}^{(n_r)}}{n_r}$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 由于 $p_{ik}^{(0)}$ 和 $p_{ik}^{(n_r)}$ 均有界, 上式极限显然为 π_k 。再验证归一化:

$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_r}{n_r} = 1$$

故 $\{\pi_j\}$ 是 \mathbf{P} 的不变分布。 □

注: 此处默认“有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布”。

从线性代数角度看, 对 $\pi \mathbf{P} = \pi$ 即 $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\pi^T = \mathbf{0}$ 有解。设 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{S \times S}$, 有 $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, 故矩阵 $\mathbf{P} - \mathbf{I}$ 的行和均为 0。这意味着其各列向量线性相关, 故 $|\mathbf{P} - \mathbf{I}| = 0$, 方程必有非零解。

9. 证明: 可逆分布是不变分布。

Proof. 由 π 可逆知, 对 $\forall i, j \in S$, 有 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ 。对 $j \in S$ 求和:

$$\sum_{j \in S} \pi_i p_{ij} = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji}$$

LHS = $\pi_i \sum_{j \in S} p_{ij} = \pi_i \cdot 1 = \pi_i$ 。故有 $\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji}$, 满足不变分布定义。 □

10. 验证注 1.2.11 中的 $\{Y_n : 0 \leq n \leq N\}$ 是马氏链, 并且其初分布仍为 π , 转移概率由 (1.2.5) 式给出。

Proof. 设 $\{X_n\}$ 是以 π 为初分布、以 \mathbf{P} 为转移矩阵的平稳马氏链。令 $Y_n = X_{N-n}$ 。

1. **初分布:** 由于 π 是 \mathbf{P} 的不变分布且 $X_0 \sim \pi$, 对任意 $k \geq 0$, 有 $X_k \sim \pi$ 。因此 $Y_0 = X_N$ 的分布仍为 π 。

2. **马尔可夫性与转移概率:** 我们要验证对于任意状态 $i_0, i_1, \dots, i_n, j \in S$:

$$P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0) = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

根据 Y_n 的定义, 等号左边等于:

$$P(X_{N-n-1} = j \mid X_{N-n} = i, X_{N-n+1} = i_{n-1}, \dots, X_N = i_0)$$

由概率定义:

$$= \frac{P(X_{N-n-1} = j, X_{N-n} = i, X_{N-n+1} = i_{n-1}, \dots, X_N = i_0)}{P(X_{N-n} = i, X_{N-n+1} = i_{n-1}, \dots, X_N = i_0)}$$

利用 $\{X_n\}$ 的联合概率分布公式 $P(X_0, \dots, X_k) = \pi_{x_0} p_{x_0 x_1} \dots p_{x_{k-1} x_k}$, 分子为:

$$\pi_j p_{ji} p_{i i_{n-1}} \dots p_{i_1 i_0}$$

分母为:

$$\pi_i p_{i i_{n-1}} \dots p_{i_1 i_0}$$

相除后消去相同项, 得:

$$P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0) = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

该值仅依赖于当前状态 i 和目标状态 j , 且与 n 无关。因此 $\{Y_n\}$ 是马氏链, 其转移概率为 $\tilde{p}_{ij} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$ 。 □

11. 科尔莫戈罗夫准则：对任意 $n \geq 1$ ，若 i_0, i_1, \dots, i_n 满足 $p_{i_r, i_{r+1}} > 0, r = 0, 1, \dots, n$ ，其中 $i_{n+1} := i_0$ ，则

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_n i_{n+1}} = p_{i_{n+1} i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_1 i_0}.$$

证明： \mathbf{P} 可配称当且仅当科尔莫戈罗夫准则成立。

Proof. “ \Rightarrow ”：由 \mathbf{P} 可配称（细致平衡）知，存在 π 使得 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ 。则：

$$\pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_n i_0} = p_{i_1 i_0} \pi_{i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_n i_0} = \cdots = p_{i_1 i_0} p_{i_2 i_1} \cdots p_{i_n i_0} \pi_{i_0}$$

由于 $\pi_{i_0} > 0$ ，约去即得准则成立。

“ \Leftarrow ”：固定状态 i_0 ，令 $\pi'_{i_0} = 1$ 。对于任意状态 i ，选取一条路径 $i_0, i_1, \dots, i_n = i$ ，定义：

$$\pi'_i = \frac{p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i}}{p_{i i_{n-1}} \cdots p_{i_1 i_0}}$$

由于科尔莫戈罗夫准则保证了该比值与路径选取无关，故 π' 定义合理。再归一化得 $\pi_i = \pi'_i / \sum_j \pi'_j$ ，易验证 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ ，故 \mathbf{P} 可配称。 \square

12. 假设 S 有限；若 $i \neq j$ ，则 $p_{ij} > 0$ ；对任意 i, j, k ， $p_{ij} p_{jk} p_{ki} = p_{ik} p_{kj} p_{ji}$ 。证明： \mathbf{P} 是可逆的。

Proof. 先证存在配称测度。由于 S 有限，不妨设 $S = \{0, 1, \dots, n\}$ 。固定 $\pi_0 > 0$ ，取 $\pi_i = \frac{p_{0i}}{p_{i0}} \pi_0$ 。由于 $i \neq 0$ 时 $p_{0i}, p_{i0} > 0$ ，故 π_i 存在。下证细致平衡：

$$\pi_i p_{ij} = \frac{p_{0i} p_{ij}}{p_{i0}} \pi_0 = \frac{p_{0i} p_{ij} p_{j0}}{p_{i0} p_{j0}} \pi_0$$

根据题目给定的三点循环条件 $p_{0i} p_{ij} p_{j0} = p_{0j} p_{ji} p_{i0}$ ，代入上式得：

$$\pi_i p_{ij} = \frac{p_{0j} p_{ji} p_{i0}}{p_{i0} p_{j0}} \pi_0 = \frac{p_{0j}}{p_{j0}} p_{ji} \pi_0 = p_{ji} \pi_j$$

又 S 有限，级数 $\sum \pi_i < \infty$ ，取归一化后的 $\pi = \{\pi_i / \sum \pi_j\}$ 为可逆分布，故 \mathbf{P} 可逆。 \square

13. 假设 π 为转移矩阵 \mathbf{P} 的不变分布。定义其逆过程的转移矩阵 $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{p}_{ij})_{i, j \in S}$ 为：

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}, \quad \forall i, j \in S \quad (1.2.5)$$

假设 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 与 $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ 都是状态空间 S 上的马氏链，满足：

- (i) 它们的转移矩阵分别为 \mathbf{P} 与 $\tilde{\mathbf{P}}$ ；
- (ii) 它们的初始分布相同，且处于平稳态： $Y_0 = X_0 \sim \pi$ ；
- (iii) 在给定共同起点 $\{X_0 = Y_0 = i\}$ 的条件下，随机序列 $\{X_n : n \geq 1\}$ 与 $\{Y_n : n \geq 1\}$ 相互独立。

构造双向序列 $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 如下：

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & \text{若 } n \geq 0, \\ Y_{-n}, & \text{若 } n < 0. \end{cases}$$

证明：对于任意给定的时间偏移 $N \in \mathbb{Z}$ ，定义新序列 $W_n = Z_{N+n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)。则 $\{W_n\}$ 是一个以 π 为初分布、以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链。

Proof. 根据 $W_n = Z_{N+n}$ 的定义，我们分两种情况讨论其马氏性质、初分布以及转移概率：

1. 情况一： $N \geq 0$

当 $N \geq 0$ 时，对任意 $n \geq 0$ ，有 $N+n \geq 0$ ，故由 Z_n 定义知：

$$W_n = X_{N+n}$$

由于 $X_0 \sim \pi$ 且 π 是 \mathbf{P} 的不变分布，由马氏链的平稳性可知 $X_N \sim \pi$ 。因此， $\{W_n\}$ 是以 $X_N \sim \pi$ 为初分布、 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链。

2. 情况二: $N < 0$

首先验证逆过程 $\{Y_n\}$ 的平稳性。已知 $Y_0 \sim \pi$, 且转移概率 $\tilde{p}_{ij} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$, 则有:

$$\sum_{i \in S} \pi_i \tilde{p}_{ij} = \sum_{i \in S} \pi_i \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i} = \pi_j \sum_{i \in S} p_{ji} = \pi_j$$

故 π 也是 \tilde{P} 的不变分布, 从而 $\forall n \geq 0, Y_n \sim \pi$ 。特别地, $W_0 = Y_{-N} \sim \pi$, 初分布满足要求。其次验证转移概率。当 $N < 0$ 时, 序列从 Y 的倒序过渡到 X :

- 在 Y 序列内部 ($N+k < 0$):

$$P(W_{k+1} = j | W_k = i) = P(Y_{-(N+k+1)} = j | Y_{-(N+k)} = i)$$

令 $m = -(N+k+1)$, 利用平稳态下的反向转移概率公式:

$$P(Y_m = j | Y_{m+1} = i) = \frac{P(Y_m = j) \tilde{p}_{ji}}{P(Y_{m+1} = i)} = \frac{\pi_j \frac{\pi_i p_{ij}}{\pi_j}}{\pi_i} = p_{ij}$$

- 在衔接点处 ($N+k=0$): 此时 $W_k = Y_0 = X_0, W_{k+1} = X_1$ 。

$$P(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij}$$

- 在 X 序列内部 ($N+k > 0$): 显然转移概率为 p_{ij} 。

最后验证马尔可夫性。易知 $\{W_0, \dots, W_{|N|}\}$ (即 Y 部分) 与 $\{W_{|N|}, \dots\}$ (即 X 部分) 分别具有马氏性。关键考察跨越衔接点 $W_{|N|} = X_0 = Y_0$ 时的情形: 对于 $k \geq 0$, 利用已知条件 (iii) 即 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 与 $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ 在给定 $X_0 = Y_0 = i$ 时相互独立:

$$\begin{aligned} & P(W_{N+k} = j | W_{N+k-1} = i_{N+k-1}, \dots, W_0 = i_0) \\ &= P(X_k = j | X_{k-1} = i_{N+k-1}, \dots, X_0 = i_N, \dots, Y_{-N} = i_0) \\ &= \frac{P(X_k = j, \dots, X_0 = i_N) \cdot P(Y_1 = i_{N-1}, \dots, Y_{-N} = i_0)}{P(X_{k-1} = i_{N+k-1}, \dots, X_0 = i_N) \cdot P(Y_1 = i_{N-1}, \dots, Y_{-N} = i_0)} \quad (\text{由独立性}) \\ &= \frac{P(X_k = j | X_{k-1} = i_{N+k-1}, \dots, X_0 = i_N) \cdot P(X_{k-1}, \dots, X_0)}{P(X_{k-1}, \dots, X_0)} \\ &= P(X_k = j | X_{k-1} = i_{N+k-1}) = p_{i_{N+k-1}, j} \end{aligned}$$

故 $\{W_n\}$ 满足马氏性。 □

1.3 状态的分类

1. 将小白鼠放在如图 1.10 所示的迷宫中移动。每一步, 小白鼠在所处格子的所有通道中等可能地任选一条并沿着它移到旁边的格子 (例如, 格子 3 有两个通道, 分别通往格子 2 与格子 6)。将小白鼠第 n 步所处格子的号码记为 X_n 。

- (1) 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间与转移概率。
- (2) 按互通关系分解状态空间。

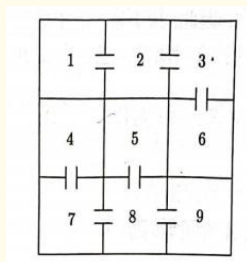


图 1.10 迷宫

Proof. (1) 状态空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。根据迷宫图 1.10 的连通情况, 小白鼠在每个格子等可能地选择通道, 转移概率如下:

- $p_{12} = 1; p_{21} = p_{23} = 1/2; p_{32} = p_{36} = 1/2;$
- $p_{63} = 1; p_{47} = 1; p_{74} = p_{78} = 1/2;$
- $p_{87} = p_{85} = p_{89} = 1/3; p_{58} = 1; p_{98} = 1;$

(2) 互通类为:

$$C_1 = \{1, 2, 3, 6\}, \quad C_2 = \{4, 5, 7, 8, 9\}$$

□

2. 证明以下命题:

• **命题 1.3.2:** 假设 $i \neq j$, 那么 $i \rightarrow j$ 与下列两条等价:

- (1) 存在 $n \geq 1$ 及 $n+1$ 个互不相同的状态 $i_0, \dots, i_n \in S$, 使得 $i_0 = i, i_n = j$ 且 $p_{i_0 i_1} > 0, p_{i_1 i_2} > 0, \dots, p_{i_{n-1} i_n} > 0$;
- (2) 存在 $n \geq 1$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$.

• **命题 1.3.5:** 假设 A 为闭集, 则

$$P_i(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1, \quad \forall i \in A.$$

• **命题 1.3.7:** 假设 A 为互通类, 且不是闭集, 则

$$P_i(\exists n \geq 0, \text{使得 } X_n \notin A) > 0, \quad \forall i \in A.$$

Proof. 1. **证明命题 1.3.2:** 记 $i \rightarrow j$ 为 (*).

(*) \Rightarrow (2): 由定义 $i \rightarrow j$ 意味着 $P_i(\exists n \geq 1, X_n = j) > 0$. 根据概率的可列可加性:

$$0 < P_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = j\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

若上式和大于 0, 则必存在某个 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$.

(2) \Rightarrow (1): 已知存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$. 由 Chapman-Kolmogorov 方程展开:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0$$

这表明求和项中至少有一项大于 0, 即存在路径 $i_0 = i, i_1, \dots, i_n = j$ 使得所有一步转移概率均大于 0. 若路径中有重复状态, 只需删去环路部分, 即可得到一组互不相同的状态满足条件.

(2) \Rightarrow (*): 显然, 若存在该路径, 则 $p_{ij}^{(n)} \geq p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} > 0$.

(1) \Rightarrow (2): 显然, $P_i(\exists n \geq 1, X_n = j) \geq P_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)} > 0$.

2. **证明命题 1.3.5:** 考虑余事件 $P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0)$. 由连续性:

$$P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0) = P_i\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n \notin A\}\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n \notin A)$$

已知 $i \in A$ 故 $P_i(X_0 \notin A) = 0$. 对 n 使用归纳法: 若 $P_i(X_k \notin A) = 0$ 成立, 则对于 $k+1$:

$$P_i(X_{k+1} \notin A) = \sum_{j \in A} P_i(X_k = j) P_j(X_1 \notin A) + \sum_{j \notin A} P_i(X_k = j) P_j(X_1 \notin A)$$

由于 A 是闭集, 对 $j \in A$ 有 $P_j(X_1 \notin A) = 0$; 由归纳假设, 第二项系数为 0. 故 $\sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n \notin A) = 0$, 即 $P_i(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$.

3. **证明命题 1.3.7:** 由于 A 不是闭集, 根据定义存在 $i_0 \in A$ 和 $k \notin A$ 使得 $p_{i_0 k} > 0$. 对于任意 $i \in A$, 由 A 是互通类知 $i \rightarrow i_0$, 故存在 $n \geq 0$ 使得 $p_{i i_0}^{(n)} > 0$. 则有:

$$p_{ik}^{(n+1)} \geq p_{i i_0}^{(n)} p_{i_0 k} > 0$$

因此:

$$P_i(\exists m \geq 0, X_m \notin A) \geq P_i(X_{n+1} = k) = p_{ik}^{(n+1)} > 0$$

□

3. 假设 A 是闭集, C 是互通类。证明: 或者 $C \subseteq A$, 或者 $C \cap A = \emptyset$ 。

Proof. 若 $C \cap A = \emptyset$, 则结论显然成立。

若 $C \cap A \neq \emptyset$, 即存在某个状态 $i \in C \cap A$ 。对于 C 中的任意状态 $j \in C$, 由于 C 是互通类, 必存在 $m_j \geq 0$ 使得:

$$p_{ij}^{(m_j)} > 0$$

由于 A 是闭集, 根据命题 1.3.5, 对于从 $i \in A$ 出发的马氏链 $\{X_n\}$, 有:

$$P_i(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$$

这意味着从 i 出发, 在任何有限步内到达的状态必须仍在 A 中。若存在某个 $j \notin A$, 则 $p_{ij}^{(m_j)} > 0$ 与 A 是闭集矛盾。故必有 $j \in A$ 对于所有 $j \in C$ 成立, 即 $C \subseteq A$ 。

综上所述, 或者 $C \subseteq A$, 或者 $C \cap A = \emptyset$ 。 □

4. 证明: 状态空间 S 可约当且仅当 S 有非空、闭的真子集。

Proof. “ \Leftarrow ”: 设 S 的非空、闭的真子集为 A 。取 $i \in S \setminus A, j \in A$ 。由于 A 是闭集, 根据定义, 对 $\forall n \geq 0$, 有 $p_{ji}^{(n)} = 0$ 。因此 $j \not\rightarrow i$, 状态 i, j 不互通, 故 S 是可约的。

“ \Rightarrow ”: 由 S 可约, 根据定义存在 $i_0, j_0 \in S$ 使得 i_0 不可达 j_0 。即对 $\forall n \geq 0$, 有 $p_{i_0 j_0}^{(n)} = 0$ 。构造集合 $A = \{k \in S \mid i_0 \rightarrow k\}$ (即从 i_0 出发可达的所有状态集合)。

- **非空性:** 由于 $i_0 \rightarrow i_0$, 故 $i_0 \in A$, 则 $A \neq \emptyset$ 。
- **真子集:** 已知 $i_0 \not\rightarrow j_0$, 故 $j_0 \notin A$ 。又 $j_0 \in S$, 故 A 是 S 的真子集。
- **闭性:** 若 A 不是闭集, 则存在 $k \in A$ 和 $t \notin A$ 使得 $p_{kt} > 0$ 。由于 $k \in A$, 意味着 $i_0 \rightarrow k$, 即存在 $n \geq 0$ 使得 $p_{i_0 k}^{(n)} > 0$ 。由此可得 $p_{i_0 t}^{(n+1)} \geq p_{i_0 k}^{(n)} p_{kt} > 0$, 即 $i_0 \rightarrow t$ 。这与 $t \notin A$ 的定义矛盾。故 A 必为闭集。

综上所述, S 存在非空、闭的真子集 A 。 □

5. 假设状态空间 S 有限。证明: 存在闭的互通类。

Proof. 由于 S 有限, 我们可以将其按互通关系分解为有限个互不相交的互通类之并: $S = \bigcup_{i=1}^m A_i$ 。

方法 1: 利用类之间的单向到达性

定义互通类之间的到达关系: 若存在 $i \in A_k, j \in A_l$ 使得 $i \rightarrow j$, 则称类 A_k 可到达 A_l 。

- 若某个类 A_k 已经是闭的, 则结论成立。
- 若 A_k 不是闭的, 则根据定义, 必存在 $j \notin A_k$ 使得从 A_k 可到达 j 。设 j 所属的类为 A_l ($l \neq k$)。
- 注意到若 $A_k \rightarrow A_l$, 则必有 $A_l \not\rightarrow A_k$ (否则 A_k, A_l 将合并为同一个类)。

由于类个数 n 有限, 这种单向到达序列 $A_{k_1} \rightarrow A_{k_2} \rightarrow \dots$ 不能无限延伸, 也不能形成环路。因此必存在某个类 A_{k_m} , 它无法到达任何其他类, 即 A_{k_m} 是闭的互通类。

方法 2: 利用闭子集的递归缩减 (基于习题 4)

- 若 S 是不可约的, 则 S 本身就是一个闭的互通类。
- 若 S 是可约的, 根据习题 4 的结论, 存在 S 的非空、闭的真子集, 记为 $S' \subset S$ 。
- 我们可以将马氏链限制在 S' 上。若 S' 不可约, 则 S' 包含一个闭的互通类; 若 S' 仍可约, 则继续寻找其非空、闭的真子集 $S'' \subset S'$ 。

由于 S 有限, 这种集合包含序列 $S \supset S' \supset S'' \supset \dots$ 必然在有限步内停止。停止时的最后一个非空闭集必然不可再分 (不可约), 即它是一个闭的互通类。 □

1.4 首达时与强马氏性

1. 假设 $i \neq j$, $P_i(\tau_j < \infty) = P_j(\tau_i < \infty) = 1$, $P_i(\tau_j < \sigma_i) = p$, $P_j(\tau_i < \sigma_j) = q$, 其中 $0 < p, q < 1$. 将从 i 出发的马氏链在回到 i 之前, 访问状态 j 的总次数记为 ξ . 求: ξ 的分布列与期望.

Proof. 根据题意, 访问次数 ξ 的取值范围为 $\{0, 1, 2, \dots\}$. 可记为 $\xi = \sum_{k=0}^N \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}$, 其中 $X_0 = i$ 且 $X_N = i$ 为第一次回到 i 的时刻.

1. 分布列推导:

• 当 $\xi = 0$ 时, 表示从 i 出发, 在到达 j 之前就先回到了 i :

$$P(\xi = 0) = P_i(\tau_j > \sigma_i) = 1 - p.$$

• 当 $\xi = n$ ($n \geq 1$) 时, 由强马尔可夫性, 该过程可分解为: 从 i 出发先到达 j (概率 p), 随后连续 $n-1$ 次从 j 出发在回到 i 之前先回到了 j (每次概率为 $1-q$), 最后一次从 j 出发回到了 i (概率为 q). 故有:

$$P(\xi = n) = p \cdot (1-q)^{n-1} \cdot q, \quad n = 1, 2, \dots$$

综上, ξ 的分布列为:

$$P(\xi = n) = \begin{cases} 1-p, & n = 0 \\ pq(1-q)^{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$$

2. 期望计算:

$$E\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(\xi = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot pq(1-q)^{n-1}$$

设 $k = 1 - q$, 令 $A = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot k^{n-1}$. 利用错位相减法:

$$\begin{aligned} A - kA &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} k^n - Nk^N \right) \\ (1-k)A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1-k^N}{1-k} - Nk^N \right) = \frac{1}{1-k} \end{aligned}$$

由于 $0 < k < 1$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时 $k^N \rightarrow 0, Nk^N \rightarrow 0$. 故 $A = \frac{1}{(1-k)^2} = \frac{1}{q^2}$. 代入期望公式:

$$E\xi = pq \cdot A = pq \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{p}{q} \quad \square$$

2*. 取 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令 $\tau \equiv n$. 证明: τ 是停时.

Proof. τ 是停时, 当且仅当对于任意 $k \geq 0$, $\{\tau \leq k\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_k)$.

对于常数停时 $\tau \equiv n$:

- 若 $k < n$, 则 $\{\tau \leq k\} = \{n \leq k\} = \emptyset$.
- 若 $k \geq n$, 则 $\{\tau \leq k\} = \{n \leq k\} = \Omega$ (全集).

由于空集 \emptyset 和全集 Ω 包含在任何 σ -代数中, 显然有:

$$\{\tau \leq k\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_k), \quad \forall k \geq 0.$$

故常数 $\tau \equiv n$ 是停时. □

3*. 证明: $\tau = \inf\{n \geq n_0 : X_n \in A\}$ 是停时.

Proof. 要证 $\tau = \inf\{n \geq n_0 : X_n \in A\}$ 是停时, 需证 $\forall k \geq 0, \{\tau \leq k\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$.

1. 若 $k < n_0$, 根据定义 $\tau \geq n_0$, 故 $\{\tau \leq k\} = \emptyset$, 显然属于 $\sigma(X_0, \dots, X_k)$.

2. 若 $k \geq n_0$, 事件 $\{\tau \leq k\}$ 发生当且仅当在时刻 n_0 到 k 之间, 过程至少有一次落入集合 A 中. 因此可以表示为:

$$\{\tau \leq k\} = \bigcup_{n=n_0}^k \{X_n \in A\}$$

由于对每一个 $n \in \{n_0, \dots, k\}$, 事件 $\{X_n \in A\}$ 仅依赖于随机变量 X_n , 从而属于 $\sigma(X_0, \dots, X_n)$ 。又因为 $n \leq k$, 则 $\sigma(X_0, \dots, X_n) \subseteq \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。

根据 σ -代数对有限并 (或可列并) 的封闭性:

$$\bigcup_{n=n_0}^k \{X_n \in A\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$$

综上所述, $\tau = \inf\{n \geq n_0 : X_n \in A\}$ 是停时。 □

4*. 假设 τ 为停时, $A \subseteq S$ 。令

$$\sigma_1 := \begin{cases} \inf\{n \geq \tau : X_n \in A\}, & \text{若 } \tau < \infty, \\ \infty, & \text{若 } \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\sigma_2 := \begin{cases} \inf\{n \geq \tau + 1 : X_n \in A\}, & \text{若 } \tau < \infty, \\ \infty, & \text{若 } \tau = \infty. \end{cases}$$

证明: σ_1, σ_2 都是停时。

Proof. 往证 σ_1 是停时, σ_2 同理。

即证 $\forall k \geq 0, \{\sigma_1 \leq k\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。

根据 σ_1 的定义, 事件 $\{\sigma_1 \leq k\}$ 发生当且仅当 $\tau \leq k$ 且在时刻 τ 到 k 之间过程进入了集合 A 。

我们可以按 τ 的取值对事件进行分解:

$$\{\sigma_1 \leq k\} = \bigcup_{m=0}^k (\{\tau = m\} \cap \{\sigma_1 \leq k\})$$

在每一个子事件 $\{\tau = m\} \cap \{\sigma_1 \leq k\}$ 中, 由于已知 $\tau = m$, 根据 σ_1 的定义, 这等价于在时刻 m 到 k 之间存在某个时刻 n 使得 $X_n \in A$ 。故:

$$\{\tau = m\} \cap \{\sigma_1 \leq k\} = \{\tau = m\} \cap \left(\bigcup_{n=m}^k \{X_n \in A\} \right)$$

现在分析所属的 σ -代数:

- 因为 τ 是停时, 故 $\{\tau = m\} \in \sigma(X_0, \dots, X_m)$ 。
- 对于任意 $n \in \{m, \dots, k\}$, 事件 $\{X_n \in A\} \in \sigma(X_n) \subseteq \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。
- 因此, 有限并 $\bigcup_{n=m}^k \{X_n \in A\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。

由于 $\sigma(X_0, \dots, X_m) \subseteq \sigma(X_0, \dots, X_k)$, 上述交集及其后的有限并显然都属于 $\sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。

对于 σ_2 , 只需将上述推导中的 $\bigcup_{n=m}^k$ 替换为 $\bigcup_{n=m+1}^k$ 即可 (若 $m = k$ 则该并集为空)。

综上所述, σ_1, σ_2 均为停时。 □

5*. 假设 τ, σ 是停时。试证明下列随机时间都是停时: $\min\{\tau, \sigma\}, \max\{\tau, \sigma\}, \tau + \sigma$ 。

Proof. 1. 证明 $\min\{\tau, \sigma\}$ 是停时: 由

$$\{\min\{\tau, \sigma\} \leq k\} = \{\tau \leq k\} \cup \{\sigma \leq k\}$$

因为 τ, σ 是停时, 故 $\{\tau \leq k\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 且 $\{\sigma \leq k\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。

则 $\{\min\{\tau, \sigma\} \leq k\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。故 $\min\{\tau, \sigma\}$ 是停时。

2. 证明 $\max\{\tau, \sigma\}$ 是停时: 由

$$\{\max\{\tau, \sigma\} \leq k\} = \{\tau \leq k\} \cap \{\sigma \leq k\}$$

同理, $\{\max\{\tau, \sigma\} \leq k\} \in \sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。

故 $\max\{\tau, \sigma\}$ 是停时。

3. 证明 $\tau + \sigma$ 是停时: 我们将事件 $\{\tau + \sigma \leq k\}$ 按 τ 的可能取值进行分解:

$$\{\tau + \sigma \leq k\} = \bigcup_{m=0}^k (\{\tau = m\} \cap \{\sigma \leq k - m\})$$

分析每一项:

- $\{\tau = m\} = \{\tau \leq m\} \setminus \{\tau \leq m - 1\}$ 。因为 τ 是停时, 故 $\{\tau = m\} \in \sigma(X_0, \dots, X_m)$ 。
- $\{\sigma \leq k - m\}$ 。因为 σ 是停时, 故该事件属于 $\sigma(X_0, \dots, X_{k-m})$ 。

由于 $m \leq k$ 且 $k - m \leq k$, 上述两个 σ -代数都是 $\sigma(X_0, \dots, X_k)$ 的子代数。
因此, 每一项交集及其有限并均属于 $\sigma(X_0, \dots, X_k)$ 。故 $\tau + \sigma$ 是停时。 □

1.5 常返性

1. 证明:

- (1) 若 D 是有限闭集, 则存在常返类 C , 使得 $C \subseteq D$ 。
- (2) 有限状态空间上的马氏链有常返态。
- (3) 若 C 是有限的闭的互通类, 则 C 是常返类。

Proof. (1) 使用反证法。不妨记 $D = \{1, \dots, n\}$ 为有限闭集。假设 D 中每个状态都是非常返的。对于非常返态 $i \in D$, 根据定义, 无限次回到自身的概率为 0, 即:

$$P_i(X_m = i \text{ i.o.}) = 0, \quad \forall i \in D$$

由于 D 是闭集, 马氏链进入 D 后不再离开, 故:

$$P_i \left(\bigcup_{j=1}^n \{X_m = j \text{ i.o.}\} \right) \leq \sum_{j=1}^n P_i(X_m = j \text{ i.o.})$$

若 D 中所有状态均非常返, 则上述有限和为 0, 即 $P_i(\exists j \in D, X_m = j \text{ i.o.}) = 0$ 。

然而, 在有限状态空间 D 中, 由于状态数有限, 马氏链在无穷次转移中必然至少有一个状态被无限次访问, 即:

$$P_i \left(\bigcup_{j=1}^n \{X_m = j \text{ i.o.}\} \right) = 1$$

由此产生矛盾。故 D 中必存在常返态, 其所属的互通类 C 即为常返类, 且 $C \subseteq D$ 。

(2) 有限状态空间 S 本身是一个有限闭集。由 (1) 直接推得 S 中必存在常返态。

(3) 由 (1) 知, 有限闭集 C 中至少存在一个常返态 k 。又因为 C 是互通类, 对于 $\forall j \in C$, 有 $j \leftrightarrow k$ 。根据常返性的类性质, 互通状态具有相同的常返/非常返属性。由于 k 是常返的, 故 C 中所有状态均为常返态, 即 C 是常返类。 \square

2. 设马氏链的状态空间为 $\{1, \dots, 7\}$, 转移矩阵如下:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

试确定哪些状态是常返的, 哪些是非常返的。

Proof. 通过观察转移矩阵 \mathbf{P} , 我们可以画出状态转移图并按互通关系对状态进行分类:

1. 互通类分析:

- 类 $C_1 = \{1, 3, 4\}$: 从 $1 \rightarrow 3 (1/8), 3 \rightarrow 4 (1), 4 \rightarrow 1 (1)$, 故这三个状态互通。但在状态 1 处, 有 $p_{15} = 1/8 > 0$, 这意味着马氏链可以从该类逃逸到状态 5。而从状态 5 无法回到 $\{1, 3, 4\}$, 故 C_1 是互通但不闭的。
- 类 $C_2 = \{5, 6, 7\}$: 从 $5 \leftrightarrow 7, 7 \leftrightarrow 6, 6 \leftrightarrow 5$ 均有正概率到达。观察矩阵最后三行, 发现所有的转移概率之和为 1, 即 $\sum_{j \in \{5, 6, 7\}} p_{ij} = 1$ 对 $i \in \{5, 6, 7\}$ 均成立。这意味着马氏链一旦进入 $\{5, 6, 7\}$ 就再也无法离开, 故 C_2 是闭的互通类。
- 状态 $\{2\}$: 从 $2 \rightarrow 3 (1)$, 即状态 2 只能单向输出到 C_1 , 没有任何状态可以进入 2 (矩阵第 2 列全为 0)。

2. 常返性判定:

- 非常返态 (Transient): $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{2\}$
- 常返态 (Recurrent): $\{5, 6, 7\}$

结论: 常返态为 $\{5, 6, 7\}$; 非常返态为 $\{1, 2, 3, 4\}$ 。 \square

1.6 击中概率

1. 假设 $\{X_n\}$ 是不可约马氏链, D 为 S 的非空真子集。令

$$\hat{X}_n = \begin{cases} X_n, & n \leq \tau_D, \\ X_{\tau_D}, & n > \tau_D. \end{cases}$$

- (1) 证明: $\{\hat{X}_n\}$ 是 S 上的马氏链。
- (2) 求 $\{\hat{X}_n\}$ 的转移概率 (用 $\{X_n\}$ 的转移矩阵表达)。
- (3) 证明: $P_i(\tau_D^{(X)} < \infty) = P_i(\tau_D^{(\hat{X})} < \infty), \forall i \in S$ 。

Proof. (1) 我们需要验证对于任意时刻 n 及状态序列 i_0, \dots, i_{n+1} , 条件概率只依赖于当前状态。

• **情形 1:** 若 $n < \tau_D$, 此时 $\hat{X}_0 = X_0, \dots, \hat{X}_n = X_n$ 且均不属于 D 。则:

$$P(\hat{X}_{n+1} = j \mid \hat{X}_n = i_n, \dots, \hat{X}_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0)$$

由于 $\{X_n\}$ 是马氏链, 上式等于 $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) = P(\hat{X}_{n+1} = j \mid \hat{X}_n = i_n)$ 。

• **情形 2:** 若 $n \geq \tau_D$, 此时根据定义, 一旦进入 D 后有 $\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n = X_{\tau_D}$ 。这意味着状态被冻结, 此时:

$$P(\hat{X}_{n+1} = j \mid \hat{X}_n = i_n, \dots, \hat{X}_0 = i_0) = \mathbf{1}_{\{j=i_n\}} = P(\hat{X}_{n+1} = j \mid \hat{X}_n = i_n)$$

综上, $\{\hat{X}_n\}$ 满足马尔可夫性。

(2) 设 $\{X_n\}$ 的转移矩阵为 $P = (p_{ij})$ 。令 $\{\hat{X}_n\}$ 的转移概率为 \hat{p}_{ij} :

• 对于 $i \in D$: 状态 i 变为吸收态,

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

• 对于 $i \notin D$: 行为与原链一致,

$$\hat{p}_{ij} = p_{ij}, \quad \forall j \in S$$

(3) 对于任意 $t \geq 1$, 考察在时刻 t 首次命中 D 的概率:

$$\begin{aligned} P_i(\tau_D^{(X)} = t) &= P_i(X_t \in D, X_{t-1} \notin D, \dots, X_1 \notin D) \\ &= P_i(\hat{X}_t \in D, \hat{X}_{t-1} \notin D, \dots, \hat{X}_1 \notin D) \\ &= P_i(\tau_D^{(\hat{X})} = t) \end{aligned}$$

由于对于 $n \leq \tau_D$ 时, $\hat{X}_n = X_n$, 所以两者的样本轨道在进入 D 之前完全重合。从而其命中时间分布一致:

$$P_i(\tau_D^{(X)} < \infty) = \sum_{t=1}^{\infty} P_i(\tau_D^{(X)} = t) = \sum_{t=1}^{\infty} P_i(\tau_D^{(\hat{X})} = t) = P_i(\tau_D^{(\hat{X})} < \infty) \quad \square$$

2. 假设 S 不可约、常返; A, B 为 S 中的非空子集, 且 $A \cap B = \emptyset$ 。记 $x_i = P_i(\tau_A < \tau_B)$, 写出 $\{x_i : i \in S\}$ 满足的方程组。

Proof. 根据定义, $x_i = P_i(\tau_A < \tau_B)$ 表示从状态 i 出发, 在击中集合 B 之前先击中集合 A 的概率。

1. **边界条件:**

- 若 $i \in A$, 则 $\tau_A = 0 < \tau_B$, 故 $x_i = 1$ 。
- 若 $i \in B$, 则 $\tau_B = 0 \leq \tau_A$, 故 $x_i = 0$ 。

2. **内部方程:** 对于 $i \notin A$ 且 $i \notin B$, 利用全概率公式对第一步转移进行分解:

$$P_i(\tau_A < \tau_B) = \sum_{j \in S} P_i(\tau_A < \tau_B | X_1 = j)P(X_1 = j)$$

考虑新序列 $Y_n = X_{n+1}$, 则有 $\tau_A^{(Y)} = \tau_A^{(X)} - 1$ 以及 $\tau_B^{(Y)} = \tau_B^{(X)} - 1$. 由马尔可夫性知:

$$P_i(\tau_A < \tau_B | X_1 = j) = P_j(\tau_A < \tau_B) = x_j$$

因此, 对于 $i \notin A \cup B$, 有:

$$x_i = \sum_{j \in S} p_{ij}x_j$$

综上所述, $\{x_i : i \in S\}$ 满足的方程组为:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j \in S} p_{ij}x_j, & i \notin A \cup B \\ x_i = 1, & i \in A \\ x_i = 0, & i \in B \end{cases}$$

□

注: 关于方程组解的唯一性说明

对于不可约、常返的马氏链, 方程组

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j \in S} p_{ij}x_j, & i \notin A \cup B \\ x_i = 1, & i \in A \\ x_i = 0, & i \in B \end{cases}$$

存在唯一解。这基于以下两个核心事实:

1. **必中性 (Almost Sure Hitting):** 由于 S 是不可约且常返的, 且 $A \cup B \neq \emptyset$, 则从任意初始状态 i 出发, 过程进入集合 $A \cup B$ 的时间 $\tau_{A \cup B} = \min(\tau_A, \tau_B)$ 满足:

$$P_i(\tau_{A \cup B} < \infty) = 1, \quad \forall i \in S$$

这意味着样本轨道几乎处处 (almost surely) 会进入集合 A 或 B 。

2. **极大值原理 (Maximum Principle):** 假设 x 和 y 是该方程组的两个有界解。令 $z_i = x_i - y_i$, 则 z 满足齐次方程:

$$z_i = \sum_{j \in S} p_{ij}z_j, \quad i \notin A \cup B; \quad \text{且 } z_i = 0, \quad i \in A \cup B$$

若 z 不恒为 0, 设 $M = \sup_{i \in S} z_i > 0$. 由不可约性知, 若某个内部点达到最大值, 则其所有邻居也必须达到最大值, 否则不满足 $z_i = \sum_{j \in S} p_{ij}z_j$. 通过迭代归纳并结合常返性可知, 过程最终必以概率 1 到达边界 $A \cup B$. 但在边界上 $z_i = 0$, 这与 $M > 0$ 矛盾。故必有 $z_i \equiv 0$ 。

结论: 常返性确保了过程不会“消失”在无穷远处 (即没有概率流失), 从而使得边界条件能够完全决定内部所有点的取值。

3. 制造某种产品需要经过前后两道工序。在完成第一道工序之后, 10% 的加工件成了废品, 20% 的加工件需要返工, 剩余的 70% 则进入第二道工序。在完成第二道工序之后, 5% 的加工件成了废品, 5% 的加工件需要返回到第一道工序, 10% 的加工件需要返回到第二道工序, 剩余的 80% 可以出厂。

- (1) 试用马氏链模拟此系统。
- (2) 利用击中概率求整个生产过程的废品率。

Proof. (1) 设状态空间 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 其中各状态含义如下:

1: 第一道工序; 2: 第二道工序; 3: 出厂 (合格品); 4: 废品。

显然, 状态 3 和 4 是吸收态。根据题目描述, 转移矩阵 \mathbf{P} 为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 设 $x_i = P_i(\tau_4 < \infty)$ 表示从状态 i 出发最终变为废品的概率。我们要求的是 x_1 。根据吸收概率方程组 $x_i = \sum_{j=1}^4 p_{ij}x_j$ ，已知边界条件 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 。对于 $i \in \{1, 2\}$ ，列方程组：

$$\begin{cases} x_1 = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.1x_4 \\ x_2 = 0.05x_1 + 0.1x_2 + 0.8x_3 + 0.05x_4 \end{cases}$$

代入边界条件简化得：

$$\begin{cases} 0.8x_1 - 0.7x_2 = 0.1 \\ -0.05x_1 + 0.9x_2 = 0.05 \end{cases}$$

解此线性方程组得：

$$x_2 = \frac{9}{137}, \quad x_1 = \frac{25}{137}$$

因此，从第一道工序开始的整个生产过程的废品率为 $\frac{25}{137} \approx 18.25\%$ 。 □

4. 某赌徒参加公平博弈，每次输、赢的概率均为 $1/2$ 。当他的赌资为 i 元时，他的策略如下：若 $0 < i \leq 5$ ，则押注 i 元；若 $5 < i < 10$ ，则押注 $10 - i$ 元；若 $i = 0$ 或 10 ，则结束赌博。假设他最初有 2 元钱。求他结束赌博时口袋里有 10 元钱的概率。（注：假设他押注 j 元，若赢则赌资增加 j 元，若输则赌资减少 j 元。）

Proof. 方法一

根据题目给出的押注策略，状态空间简化为 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 。令 $x_i = P_i(\tau_{10} < \tau_0)$ 。目标是求 x_2 。根据转移概率，列出方程组：

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2}x_4 & (\text{因为 } x_0 = 0) \\ x_4 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_8 = \frac{1}{2}x_8 \\ x_8 = \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_{10} = \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2} & (\text{因为 } x_{10} = 1) \\ x_6 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_{10} = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

将方程进行代换：

1. 由前两式得 $x_2 = \frac{1}{4}x_8$ 。
2. 将其代入第四式得 $x_6 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x_8) + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x_8 + \frac{1}{2}$ 。
3. 将 x_6 代入第三式：

$$\begin{aligned} x_8 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}x_8 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{16}x_8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{16}x_8 + \frac{3}{4} \\ \frac{15}{16}x_8 &= \frac{3}{4} \implies x_8 = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

最后求 x_2 ：

$$x_2 = \frac{1}{4}x_8 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

方法二

根据赌徒的倍增策略，我们分析状态间的转移路径。初始状态为 2：

- 从 2 出发，路径为 $2 \xrightarrow{1/2} 4 \xrightarrow{1/2} 8$ 。故 $2 \rightarrow 8$ 的概率为 $1/4$ 。
- 到达 8 后，有两种结果：
 1. 直接胜出： $8 \xrightarrow{1/2} 10$ ，概率为 $1/2$ 。
 2. 进入循环： $8 \xrightarrow{1/2} 6 \xrightarrow{1/2} 10$ （胜出）或 $8 \xrightarrow{1/2} 6 \xrightarrow{1/2} 2$ （回到起点）。

观察从 8 出发回到 2 的概率：

$$P(8 \rightarrow 2) = P(8 \rightarrow 6) \cdot P(6 \rightarrow 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

观察从 8 出发直接或经由 6 到达 10 的概率：

$$P(8 \rightarrow 10) = P(\text{直接}) + P(8 \rightarrow 6 \rightarrow 10) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

因此，从 2 出发，经过一轮循环回到 2 的总概率为：

$$P(\text{回到}2) = P(2 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

而每一轮循环中，能够最终到达 10 的概率贡献为：

$$P(\text{到达}10) = P(2 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \text{ 或 } 6 \rightarrow 10) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

利用几何级数求和，总胜率为：

$$P_{\text{win}} = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \cdots = \frac{3}{16} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^t = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

□

5. 研究更新过程（例 1.1.9）的常返性。

例 1.1.9 (更新过程): 设灯泡寿命 L_1, L_2, \dots 独立同分布于 $L \in \mathbb{Z}_+$ 。更新时刻为 $S_0 = 0, S_n = \sum_{r=1}^n L_r$ 。

- 余寿过程 $X_n = S_{r_n} - n$ ，其中 $r_n = \inf\{r : S_r \geq n\}$ 。
- 转移概率： $p_{i,i-1} = 1 (i \geq 1)$ ； $p_{0,i} = P(L = i + 1) (i \geq 0)$ 。

Proof. 显然，更新过程马氏链是不可约的。根据类性质，只需证明状态 0 是常返的，即可说明全链常返。

令 $x_i = P_i(\tau_0 < \infty)$ 表示从状态 i 出发最终回到状态 0 的概率，往证 $x_0 = 1$ 。

1. **分析内部状态:** 对于 $i \geq 1$ ，由于转移概率 $p_{i,i-1} = 1$ ，通过归纳法易知：

$$x_i = P_i(\tau_{i-1} < \infty) \cdot P_{i-1}(\tau_{i-2} < \infty) \cdots P_1(\tau_0 < \infty) = 1 \cdot 1 \cdots x_1$$

由于从任何 $i \geq 1$ 出发都只能经过有限步（即 i 步）必然到达 0，故：

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \cdots = X$$

显然 $X = 1$ 。

2. **分析起点 0:** 利用第一步分析法列出 x_0 的方程：

$$x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} p_{0,i} x_i$$

将上述 $x_i = 1 (i \geq 1)$ 的结论代入，且注意在求 $x_0 = P_0(\tau_0 < \infty)$ 时，第一步必须离开 0：

$$x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} P(L = i + 1) \cdot 1$$

由于灯泡寿命 L 几乎处处有限，即 $\sum_{i=0}^{\infty} P(L = i + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(L = k) = 1$ 。由此得：

$$x_0 = 1$$

故状态 0 是常返态，进而该更新过程是常返的。

□

6. 证明：对于任意 $d \geq 2$ ，规则树 \mathbb{T}^d 上的简单随机游走是非常返。

Proof. 考虑规则树 \mathbb{T}^d 上的简单随机游走 (SRW)。在 \mathbb{T}^d 中，每个顶点的度均为 $d + 1$ 。设根节点为 0。要证其非常返，只需证格林函数 $G_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(n)} < \infty$ 。

1. **路径计数与转移概率:** 由于树是二分图，奇数步回到原点的概率为 0，即 $P_{00}^{(2n+1)} = 0$ 。对于 $2n$ 步回到原点的情况，游走必须包含 n 步“远离根节点”的移动和 n 步“靠近根节点”的移动。在每一步中：

- 远离根节点的概率为 $\frac{d}{d+1}$ （有 d 条子边）；
- 靠近根节点的概率为 $\frac{1}{d+1}$ （有 1 条父边）。

因此，回到原点的概率为：

$$P_{00}^{(2n)} = C_{2n}^n \cdot \left(\frac{d}{d+1}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{d+1}\right)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{d^n}{(d+1)^{2n}}$$

2. 渐近分析：利用 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ，可得组合项的渐近估计：

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

代入转移概率表达式：

$$P_{00}^{(2n)} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{d^n}{(d+1)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{4d}{(d+1)^2}\right)^n$$

3. 收敛性判定：令 $\rho = \frac{4d}{(d+1)^2}$ 。当 $d \geq 2$ 时，由于 $(d-1)^2 > 0 \implies d^2 + 2d + 1 > 4d$ ，故 $(d+1)^2 > 4d$ ，即 $\rho < 1$ 。此时， $P_{00}^{(2n)}$ 的每一项都受到几何级数 ρ^n 的控制：

$$G_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(2n)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \rho^n$$

由于 $\rho < 1$ ，该级数显然收敛（即 $G_{00} < \infty$ ）。

由格林函数值有限可知，规则树 T^d ($d \geq 2$) 上的简单随机游走是非常返的。 □

7. 假设 $\{X_n\}$ 为 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 上的马氏链，转移概率如下：

$$p_{01} = 1; \quad p_{i,i+1} = \frac{i^2 + 2i + 1}{2i^2 + 2i + 1}, \quad p_{i,i-1} = \frac{i^2}{2i^2 + 2i + 1}, \quad i \geq 1;$$

若 $|i - j| \geq 2$ ，则 $p_{ij} = 0$ 。证明该马氏链是非常返的，并计算 $\rho_i = P_i(\sigma_0 < \infty)$ 。（提示： $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。）

Proof. 对于状态空间 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 上的出生死亡过程，令 $q_i = p_{i,i-1}$ ， $p_i = p_{i,i+1}$ 。定义比值 $\gamma_i = \frac{q_i}{p_i}$ 。根据题目给出的概率：

$$\gamma_i = \frac{i^2 / (2i^2 + 2i + 1)}{(i+1)^2 / (2i^2 + 2i + 1)} = \frac{i^2}{(i+1)^2}$$

1. 非常返性证明：出生死亡过程是非常返的，当且仅当级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \gamma_j$ 收敛。计算该累乘项：

$$\prod_{j=1}^i \gamma_j = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{2^2}{3^2} \cdots \frac{i^2}{(i+1)^2} = \frac{1}{(i+1)^2}$$

考察级数：

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \gamma_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 < \infty$$

由于级数收敛，该马氏链是非常返的。

2. 计算命中概率 $\rho_i = P_i(\sigma_0 < \infty)$ ：对于非常返的出生死亡过程，从状态 i ($i > 1$) 出发回到 0 的概率公式为：

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \prod_{k=1}^j \gamma_k}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^j \gamma_k}$$

（注：分母中的 1 对应了起点到 1 的贡献，由于 $p_{01} = 1$ ，从 0 出发回到 0 必须经过 1）。代入累乘项 $\frac{1}{(j+1)^2}$ ：

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}} = \frac{\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

利用提示中的巴塞尔问题结果 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ，可得：

$$\rho_i = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^i \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^i \frac{1}{k^2}$$

特别地，当 $i = 0$ 时， $\rho_0 = 1$ 。 □

8. 假设 $\{X_n\}$ 为离散圆周 S_N 上的简单随机游走 (定义见例 1.2.8)。试求 $\{X_n\}$ 在首次回到初始点之前走遍所有顶点的概率。

Proof. 设圆周顶点为 $\{0, 1, \dots, N-1\}$ 。设 P_0 为从起点 0 出发, 在首次回到 0 前走遍所有顶点的概率。

1. **首步分析法:** 从 0 出发, 第一步以概率 $1/2$ 到达 1, 以概率 $1/2$ 到达 $N-1$ 。由于圆周的对称性, 从 1 出发在回到 0 前走遍其余顶点的概率, 与从 $N-1$ 出发在回到 0 前走遍其余顶点的概率相等。令该概率为 u_1 。则:

$$P_0 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_{N-1} = u_1$$

2. **转化一维游走问题:** 考察状态 1。要走遍所有顶点且不回到 0, 意味着在路径中必须先到达 $N-1$ 而不能触碰 0。一旦到达 $N-1$, 由于路径已经覆盖了从 1 到 $N-1$ 的所有点 (通过顺时针或逆时针), 任务即宣告完成。这等价于在一个区间 $[0, N-1]$ 上的简单随机游走:

- 起点为 1。
- 目标状态 (胜出) 为 $N-1$ 。
- 吸收状态 (失败) 为 0。

设 $u_i = P_i(\tau_{N-1} < \tau_0)$ 。根据赌徒输光问题的标准结论, 其满足差分方程:

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{2}u_{i-1} + \frac{1}{2}u_{i+1}, & 1 \leq i \leq N-2 \\ u_{N-1} = 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

该方程的解为 $u_i = \frac{i}{N-1}$ 。因此, 我们所求的 u_1 为:

$$u_1 = \frac{1}{N-1}$$

故

$$P_0 = \frac{1}{N-1}$$

□

9. 假设 $\{S_n\}$ 是一维简单随机游走, $N \geq 2$ 。记 $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ 或 } N\}$ 。证明:

- (1) $P_k(\tau \leq N) \geq 2^{-(N-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, N;$
- (2) $E_k\tau < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, N.$

Proof. (1) 要使 $\tau \leq N$, 只需游走在 N 步之内触碰边界 0 或 N 。考虑两条特殊的单向路径:

- **向左单向:** 从 k 出发, 连续 k 步向左移动到达 0。其概率为 2^{-k} 。由于 $k \leq N$, 这保证了 $\tau \leq k \leq N$ 。
- **向右单向:** 从 k 出发, 连续 $N-k$ 步向右移动到达 N 。其概率为 $2^{-(N-k)}$ 。这保证了 $\tau \leq N-k \leq N$ 。

这两条路径是互斥的 (除非已经在边界上)。因此:

$$P_k(\tau \leq N) \geq \max(2^{-k}, 2^{-(N-k)})$$

当 $k=1$ 或 $k=N-1$ 时, 上述最小值的下界达到 $2^{-(N-1)}$ 。即:

$$P_k(\tau \leq N) \geq 2^{-(N-1)}, \quad \forall k \in \{0, \dots, N\}$$

(2) 令 $e_k = E_k\tau$ 。利用首步分析法, 对于 $1 \leq k \leq N-1$:

$$e_k = \frac{1}{2}(e_{k-1} + 1) + \frac{1}{2}(e_{k+1} + 1) = 1 + \frac{1}{2}e_{k-1} + \frac{1}{2}e_{k+1}$$

整理得二阶差分方程:

$$e_{k+1} - 2e_k + e_{k-1} = -2$$

边界条件为 $e_0 = e_N = 0$ 。该方程的特解为 $-k^2$, 齐次解为 $Ak + B$ 。代入边界条件解得:

$$e_k = k(N-k)$$

对于任何有限的 N 和 k , 显然有:

$$E_k\tau = k(N-k) \leq \frac{N^2}{4} < \infty$$

故平均吸收时间有限。

□

10*. 对任意 $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, 独立抛一枚公平的硬币, 若抛到正面, 则在 (i, j) 与 $(i+1, j)$ 之间连一条边, 否则, 在 (i, j) 与 $(i, j+1)$ 之间连一条边。于是, 我们得到二维格点的随机子图 G , 以 \mathbb{Z}^2 为顶点。证明:

$$P(G \text{ 连通}) = 1.$$

Proof. 根据构造, 格点 \mathbb{Z}^2 中的每个顶点 (i, j) 正好有一条出边, 要么指向右邻 $(i+1, j)$, 要么指向步邻 $(i, j+1)$ 。这意味着:

- 图 G 的每个连通分支都是一棵树。
- 从任意顶点 $v \in \mathbb{Z}^2$ 出发, 存在唯一的无穷路径 $P_v = (v_0, v_1, v_2, \dots)$ 。

要证明 G 以概率 1 连通, 只需证明对于任意两个初始顶点 $u, v \in \mathbb{Z}^2$, 从它们出发的无穷路径 P_u 与 P_v 最终会以概率 1 相交 (即汇合于某点)。

1. 坐标变换与随机游走化: 设从 (i_0, j_0) 出发的路径在第 n 步到达 (I_n, J_n) 。由于每一步要么 i 加 1, 要么 j 加 1, 总步数 $n = (I_n - i_0) + (J_n - j_0)$ 。令 $X_n = I_n - J_n$ 。

- 若第 n 步向右, 则 $X_n - X_{n-1} = (i+1-j) - (i-j) = 1$;
- 若第 n 步向上, 则 $X_n - X_{n-1} = (i-(j+1)) - (i-j) = -1$ 。

因此, 可以等价构造 $\{X_n\}$ 为一个起点为 $i_0 - j_0$ 的一维简单随机游走。

2. 路径相交的等价性: 考虑从两个不同顶点 u, v 出发的两条路径对应的游走 $\{X_n^u\}$ 和 $\{X_n^v\}$ 。这两条路径相交, 等价于存在某个时刻 n , 使得两者的坐标完全一致, 即 $(I_n^u, J_n^u) = (I_n^v, J_n^v)$ 。由于步数 n 相同, 且 $I_n + J_n$ 对于两路径的变化步调一致 (每步都加 1), 相交条件简化为:

$$I_n^u - J_n^u = I_n^v - J_n^v \implies X_n^u = X_n^v$$

3. 差过程分析: 令 $Z_n = X_n^u - X_n^v$ 。由于各格点处的硬币抛掷是独立的, 在两路径未相交前, 它们每一步的位移是相互独立的。此时 $\{Z_n\}$ 也是一个对称随机游走, 其步长分布为:

$$P(\Delta Z = 2) = 1/4, \quad P(\Delta Z = -2) = 1/4, \quad P(\Delta Z = 0) = 1/2$$

已知一维对称随机游走是常返的。因此, 差过程 $\{Z_n\}$ 最终必以概率 1 回到状态 0。一旦 $Z_n = 0$, 即 $X_n^u = X_n^v$, 由于 n 相同且路径构造的唯一性, 这两条路径从此汇合为一条。因为 \mathbb{Z}^2 是可列个顶点的集合, 且任意两点出发的路径都以概率 1 汇合, 故整个图 G 几乎处处连通。

$$P(G \text{ 连通}) = 1 \quad \square$$

1.7 格林函数

1. 一只青蛙在正立方体的 8 个顶点上做随机游动, 每次以 1/4 的概率停留不动, 以 1/4 的概率选取一条边并跳至相邻的顶点。试求:

- (1) 从正方体的一个顶点 v 出发首次回到 v 的平均时间;
- (2) 从 v 出发首次到达对径点 w 的平均时间。

Proof. 设正立方体的顶点集合为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 。设起点为 1, 目标点为 v 或其对径点。根据题目, 每次停留概率为 1/4, 跳向相邻三个顶点的概率各为 1/4。

(1) 利用首步分析法。从状态 1 出发, 第一步:

- 以 1/4 概率留在 1, 此时已耗时 1 步, 仍需 0 步回到 1 (因为 σ_1 定义为首项往返时间, 停留一步即算回到原点);
- 以 3/4 概率跳向相邻点 (如 2, 4, 5), 耗时 1 步, 后续需从相邻点出发回到 1。

$$E_1(\sigma_1) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times (1 + E_2(\tau_1))$$

由对称性, 与 1 相邻的点其回返期望时间相同。令 e_k 为距离 1 为 k 步的顶点首次到达 1 的平均时间。则 $E_1(\sigma_1) = 1 + \frac{3}{4}e_1$ 。

根据方程组推导:

- $e_0 = 0$
- $e_1 = 1 + \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_0 + \frac{2}{4}e_2$
- $e_2 = 1 + \frac{1}{4}e_2 + \frac{2}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_3$
- $e_3 = 1 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{3}{4}e_2$

解得 $e_1 = \frac{28}{3}$, $e_2 = 12$, $e_3 = \frac{40}{3}$ 。代入 $E_1(\sigma_1)$ 的表达式:

$$E_1(\sigma_1) = 1 + \frac{3}{4} \times \frac{28}{3} = 1 + 7 = 8$$

(2) 从 1 出发到达 7, 其初始距离为 3。因此, 所需的平均时间即为:

$$E_1(\tau_7) = e_3 = \frac{40}{3}$$

□

2. 假设 $\{S_n\}$ 是从 0 出发的一维随机游动, 步长分布为 $P(\xi = k) = 1/6, k = 1, \dots, 6$ 。令 $T = \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ 可以被 } 8 \text{ 整除}\}$ 。试求: E_0T 。

Proof. 设 $e_i = E_iT$ 为从状态 i 出发到达目标状态集合 $\{k : k \equiv 1 \pmod{8}\}$ 的平均时间。由于步长为正且转移具有平移不变性, 我们可以将状态空间简化为 $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 。目标状态为 1。由定义知 $e_1 = 0$ (当 $n \geq 1$ 且 $S_n \equiv 1 \pmod{8}$ 时停止, 但在计算 e_1 的往返时间时需注意第一步离开)。

根据首步分析法, 对于 $i \in \mathbb{Z}_8$ 且 $i \neq 1$:

$$e_i = 1 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 e_{(i+k) \pmod{8}}$$

列出方程组:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 + \frac{1}{6}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) = 1 + \frac{1}{6}(0 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \\ e_2 &= 1 + \frac{1}{6}(e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_0) \\ e_3 &= 1 + \frac{1}{6}(e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_0 + e_1) = 1 + \frac{1}{6}(e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_0 + 0) \\ &\vdots \\ e_7 &= 1 + \frac{1}{6}(e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) = 1 + \frac{1}{6}(e_0 + 0 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \end{aligned}$$

这是一组关于 $\{e_0, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ 的 7 元线性方程组, 求得:

$$e_0 = \frac{205886}{30025} \approx 6.857$$

□

3. 某商家设计了一套小画片, 共有 N 种, 并在每一产品包装里塞入一张小画片, 种类等可能出现。假设某人每天购买一包该产品, 第 n 天见过 X_n 种不同的小画片。

- (1) 写出 $\{X_n\}$ 的转移概率。
- (2) 假设此人总共花了 τ 天收集齐整套小画片, 试求 $E\tau$ 。

Proof. (1) 状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, 表示已收集不同画片种数。假设已见过 i 种画片, 则购入新画片时:

- 以概率 $\frac{i}{N}$ 抽到已有的种类, 状态保持不变: $p_{i,i} = \frac{i}{N}$;
- 以概率 $\frac{N-i}{N}$ 抽到尚未见过的种类, 状态增加 1: $p_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}$ 。

其余转移概率均为 0。

(2) 令 $X_i = E_i(\tau_N)$ 为当前已收集 i 种, 到集齐 N 种还需的期望天数。目标求 X_0 。显然有边界条件 $X_N = 0$ 。对于 $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, 利用首步分析法:

$$X_i = 1 + \frac{i}{N}X_i + \frac{N-i}{N}X_{i+1}$$

整理得:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{i}{N}\right)X_i &= 1 + \frac{N-i}{N}X_{i+1} \\ \frac{N-i}{N}X_i &= 1 + \frac{N-i}{N}X_{i+1} \end{aligned}$$

由此得到相邻状态间的期望步数差:

$$X_i - X_{i+1} = \frac{N}{N-i}$$

利用累加消元 (或全期望公式):

$$\begin{aligned} X_0 &= (X_0 - X_1) + (X_1 - X_2) + \dots + (X_{N-1} - X_N) + X_N \\ X_0 &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{N}{N-i} = N \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{1} \right) = N \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \end{aligned}$$

□

4. 设 $\{X_n\}$ 为随机游走, 步长分布为 $P(\xi = 2) = P(\xi = -1) = 1/2$ 。令 $\phi(s) := E_1 s^{\tau_0}$, 其中 $s \in (0, 1)$ 。证明: $s\phi(s)^3 - 2\phi(s) + s = 0$ 。

Proof. 考虑从状态 1 出发首次到达 0 的停时 τ_0 。令 $\phi(s) = E_1[s^{\tau_0}]$ 。

从状态 1 出发, 第一步耗时 1, 且以概率 1/2 到达状态 3 (跳 +2), 以概率 1/2 到达状态 0 (跳 -1)。

$$\phi(s) = E_1[s^{\tau_0}] = \frac{1}{2}E_1[s^{\tau_0}|X_1 = 3] + \frac{1}{2}E_1[s^{\tau_0}|X_1 = 0]$$

对于第二项, 若 $X_1 = 0$, 则 $\tau_0 = 1$ 。因此 $E_1[s^{\tau_0}|X_1 = 0] = s^1 = s$ 。对于第一项, 若 $X_1 = 3$, 则 $\tau_0 = 1 + \tau'_0$, 其中 τ'_0 是从 3 到 0 的所需时间。

$$\phi(s) = \frac{1}{2}sE_3[s^{\tau_0}] + \frac{1}{2}s$$

由于步长分布具有空间平移不变性, 从 3 到 0 的过程等价于从 3 先到 2, 再从 2 到 1, 最后从 1 到 0。由于路径在跳跃过程中必须经过 (或越过) 相邻状态, 且每次下降只能通过 -1 的步长 “精准降落” 在目标点, 我们可以将 τ_0 分解为三个独立的同分布时间段:

$$E_3[s^{\tau_0}] = E_3[s^{\tau_2}] \cdot E_2[s^{\tau_1}] \cdot E_1[s^{\tau_0}]$$

由于每一段的分布都与从 1 到 0 的 $\phi(s)$ 相同, 得:

$$E_3[s^{\tau_0}] = \phi(s)^3$$

将 $\phi(s)^3$ 代入首步分析的方程中:

$$\phi(s) = \frac{1}{2}s\phi(s)^3 + \frac{1}{2}s$$

方程两边同时乘以 2:

$$2\phi(s) = s\phi(s)^3 + s$$

整理可得:

$$s\phi(s)^3 - 2\phi(s) + s = 0$$

□

5. 设 $\{X_n\}$ 是状态空间 S 上的马尔可夫链, $D \subset S$ 为一子集。记 $\sigma_D = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin D\}$ 为过程首次离

开区域 D 的时间。证明：平均离开时间 $\{E_i\sigma_D : i \in S\}$ 是下列方程组 (1.7.8) 的最小非负解：

$$\begin{cases} y_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} y_j, & i \in D \\ y_i = 0, & i \notin D \end{cases} \quad (1.7.8)$$

Proof. 记 $x_i = E_i\sigma_D$ 。我们要证明 $\{x_i\}$ 满足方程组 (1.7.8) 且是所有非负解中最小的一个。

1. 证明 $\{x_i\}$ 是方程组的一个解

- 若 $i \notin D$ ，根据定义 $\sigma_D = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin D\}$ ，此时 $X_0 \notin D$ ，故 $\sigma_D = 0$ 。因此 $x_i = E_i[0] = 0$ ，满足方程第二行。
- 若 $i \in D$ ，利用首步分析法（全期望公式）：

$$x_i = E_i[\sigma_D] = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} E_j[\sigma_D] = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} x_j$$

这里 1 代表第一步耗时， $\sum p_{ij} x_j$ 代表从新状态 j 开始所需的期望剩余时间。满足方程第一行。

2. 证明 $\{x_i\}$ 是最小非负解

设 $\{y_i\}$ 是方程组 (1.7.8) 的任一非负解。对于 $i \notin D$ ， $y_i = 0 = x_i$ 。对于 $i \in D$ ，迭代代入方程：

$$y_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} y_j = 1 + \sum_{j \in D} p_{ij} y_j + \sum_{j \notin D} p_{ij} \cdot 0 = 1 + \sum_{j \in D} p_{ij} y_j$$

对上式进行 n 次递归代换：

$$\begin{aligned} y_i &= P_i(\sigma_D > 0) + \sum_{j_1 \in D} p_{ij_1} y_{j_1} \\ &= P_i(\sigma_D > 0) + \sum_{j_1 \in D} p_{ij_1} \left(1 + \sum_{j_2 \in D} p_{j_1 j_2} y_{j_2} \right) \\ &= P_i(\sigma_D > 0) + P_i(\sigma_D > 1) + \sum_{j_1, j_2 \in D} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} + \sum_{j_1, j_2, j_3 \in D} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} y_{j_3} \\ &\vdots \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} P_i(\sigma_D > m) + \sum_{j_1, \dots, j_n \in D} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} y_{j_n} \end{aligned}$$

其中，前 n 项的和 $\sum_{m=0}^{n-1} P_i(\sigma_D > m)$ 对应了过程在前 n 步内留在区域 D 的期望时间 $\mathbb{E}_i[\min(\sigma_D, n)]$ ；最后一项则表示 n 步后若仍未离开 D ，则从第 n 步的状态 j_n 开始剩余的期望代价。

由于 $\{y_i\}$ 是非负解，上述等式右侧的求和项 ≥ 0 。因此，对于任意 $n \geq 1$ ：

$$y_i \geq \sum_{m=0}^{n-1} P_i(\sigma_D > m)$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，根据非负随机变量期望的级数表示：

$$y_i \geq \sum_{m=0}^{\infty} P_i(\sigma_D > m) = E_i\sigma_D = x_i$$

综上所述，对于任意非负解 y_i ，都有 $y_i \geq x_i$ ，故 $\{E_i\sigma_D\}$ 是方程组的最小非负解。 \square

6. 假设 i, j 是两个互不相等的状态。证明下面三条等价：

- (1) $\rho_{ij} > 0$;
- (2) $i \rightarrow j$;
- (3) $G_{ij} > 0$.

Proof. 对于互不相等的状态 $i \neq j$, 我们通过循环证明 (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1) 来建立等价性。

(1) \implies (2): 已知 $\rho_{ij} = P_i(\sigma_j < \infty) > 0$ 。根据概率的可列可加性:

$$P_i(\sigma_j < \infty) = P_i\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{\sigma_j = m\}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(\sigma_j = m) > 0$$

因此, 必然存在某个有限的正整数 $m \geq 1$, 使得 $P_i(\sigma_j = m) > 0$ 。由于 $\{\sigma_j = m\}$ 意味着在第 m 步首次到达 j , 这蕴含了 $P_i(X_m = j) = p_{ij}^{(m)} > 0$ 。根据定义, 这说明从 i 可以到达 j , 记作 $i \rightarrow j$ 。

(2) \implies (3): 若 $i \rightarrow j$, 则存在某个 $m \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(m)} > 0$ 。考察格林函数 (从 i 出发访问 j 的期望次数):

$$G_{ij} = E_i \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{X_k=j\}} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)}$$

由于级数中的每一项 $p_{ij}^{(k)} \geq 0$, 且存在一项 $p_{ij}^{(m)} > 0$, 故:

$$G_{ij} \geq p_{ij}^{(m)} > 0$$

(3) \implies (1): 使用反证法。假设 $\rho_{ij} = 0$, 即 $P_i(\sigma_j < \infty) = 0$ 。这意味着从 i 出发, 样本轨道以概率 1 永远不会进入状态 j :

$$P_i(X_k \neq j, \forall k \geq 1) = 1$$

由此推得对所有的 $k \geq 1$, 都有 $p_{ij}^{(k)} = 0$ 。由于 $i \neq j$, 初始项 $p_{ij}^{(0)} = 0$ 。则格林函数 $G_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)} = 0$, 这与已知条件 $G_{ij} > 0$ 矛盾。故必有 $\rho_{ij} > 0$ 。 \square

7. 证明: $\rho_{ii} = 1 - 1/G_{ii}$ 。

Proof. 利用首次回到状态 i 的时间 σ_i 对 G_{ii} 进行全概率分解:

$$G_{ii} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = i)$$

根据强马尔可夫性, 每一项 $P_i(X_n = i)$ 可分解为先在 m 步首回 i , 再经 $n - m$ 步回到 i :

$$G_{ii} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n P_i(\sigma_i = m) P_{ii}^{(n-m)}$$

交换求和次序 (令 $k = n - m$):

$$G_{ii} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_i(\sigma_i = m) \sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$$

观察上式, 第一项求和为 ρ_{ii} , 第二项为 G_{ii} , 得:

$$G_{ii} = 1 + \rho_{ii} G_{ii}$$

整理即得:

$$\rho_{ii} = 1 - \frac{1}{G_{ii}}$$

\square

8. 对任意 $i, j \in S$, 令 $F_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} P_i(\tau_j = n) s^n$, $G_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) s^n$ 。证明:

$$G_{ij}(s) = F_{ij}(s) G_{jj}(s).$$

Proof. 根据定义, 格林函数 $G_{ij}(s)$ 的各项系数为 $P_i(X_n = j)$ 。利用首次到达状态 j 的停时 τ_j 对事件 $\{X_n = j\}$ 进行分解:

$$P_i(X_n = j) = \sum_{m=1}^n P_i(\tau_j = m)P_j(X_{n-m} = j)$$

代入 $G_{ij}(s)$ 的定义式:

$$G_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n P_i(\tau_j = m)P_j(X_{n-m} = j) \right) s^n$$

(注: 由于 $i \neq j$ 时 $P_i(X_0 = j) = 0$, 级数从 $n = 1$ 开始; 若 $i = j$ 则公式显然成立且包含 $n = 0$ 项) 交换求和次序, 并令 $k = n - m$:

$$\begin{aligned} G_{ij}(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_i(\tau_j = m)s^m \sum_{k=0}^{\infty} P_j(X_k = j)s^k \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} P_i(\tau_j = m)s^m \right) \cdot G_{jj}(s) \end{aligned}$$

由于第一项求和正是首达时间生成函数 $F_{ij}(s)$ 的定义, 故:

$$G_{ij}(s) = F_{ij}(s)G_{jj}(s)$$

□

9. 假设 ξ_1, \dots, ξ_n 独立同分布, $P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) = p \in (0, 1)$ 。记 $K = \xi_1 + \dots + \xi_n$ 。

(1) 证明: $E(K - EK)^4 = nE(\xi_1 - p)^4 + C_n^2 C_4^2 (\text{Var}(\xi_1))^2$ 。

(2) 假设 $0 < q < p$, 对任意 $a > 0$, 令 $\varphi(a) = e^{-aq}(pe^a + 1 - p)$ 。证明: 对任意 $a > 0, P(K < qn) \leq \varphi(a)^n$, 并证明: 存在 a , 使得 $\varphi(a) < 1$ 。

Proof. (1) 记 $X_i = \xi_i - p$, 则 $EX_i = 0$ 且 $\{X_i\}$ 独立同分布。令 $Y = K - EK = \sum_{i=1}^n X_i$ 。展开四次方得:

$$EY^4 = E \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^4 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E(X_i X_j X_k X_l)$$

由于 $EX_i = 0$ 且相互独立, 期望项 $E(X_i X_j X_k X_l)$ 不为零当且仅当指标成对相等或全部相等:

1. **全部相等** ($i = j = k = l$): 共有 n 项, 每项为 EX_i^4 。贡献为 $nE(\xi_1 - p)^4$ 。

2. **成对相等但两两不等** (如 $i = j \neq k = l$): 从 n 个指标中选出 2 个不同指标的组合数为 C_n^2 。对于每一对 $\{i, j\}$, 满足条件的排列有:

$$\{i, i, j, j\}, \{i, j, i, j\}, \{i, j, j, i\}, \{j, j, i, i\}, \{j, i, j, i\}, \{j, i, i, j\}$$

共 6 种 (即 C_4^2 种)。每项期望均为 $EX_i^2 EX_j^2 = (\text{Var}(\xi_1))^2$ 。贡献为 $6C_n^2 (\text{Var}(\xi_1))^2 = 3n(n-1)(\text{Var}(\xi_1))^2$ 。

综上所述:

$$E(K - EK)^4 = nE(\xi_1 - p)^4 + 3n(n-1)(\text{Var}(\xi_1))^2$$

(2) 对于任意 $a > 0$, 利用指数函数的单调性:

$$P(K < qn) = P(-aK > -aqn) = P(e^{-aK} > e^{-aqn})$$

由 **Markov 不等式**得:

$$P(e^{-aK} > e^{-aqn}) \leq \frac{E[e^{-aK}]}{e^{-aqn}} = e^{aqn} E[e^{-a \sum_{i=1}^n \xi_i}]$$

由于 ξ_i 独立同分布, 利用矩生成函数 (MGF):

$$E[e^{-a \sum \xi_i}] = \prod_{i=1}^n E[e^{-a \xi_i}] = (pe^{-a} + (1-p)e^0)^n = (pe^{-a} + 1 - p)^n$$

代入上式整理:

$$P(K < qn) \leq [e^{aq}(pe^{-a} + 1 - p)]^n = \varphi(a)^n$$

令 $f(a) = \ln \varphi(a) = aq + \ln(pe^{-a} + 1 - p)$ 。显然 $\varphi(0) = 1 \implies f(0) = 0$ 。对 $f(a)$ 求导：

$$f'(a) = q + \frac{-pe^{-a}}{pe^{-a} + 1 - p}$$

代入 $a = 0$ 得：

$$f'(0) = q - \frac{p}{p + 1 - p} = q - p$$

由于已知 $q < p$ ，故 $f'(0) < 0$ 。根据导数定义，在 0 的右邻域内函数 $f(a)$ 严格递减。因此存在充分小的 $a \in (0, \delta)$ ，使得 $f(a) < f(0) = 0$ ，即 $\varphi(a) < 1$ 。□

10. 假设 $d \geq 3$ 。证明：存在常数 C_d ，使得 $P_0(S_{2n} = 0) \leq C_d \cdot n^{-d/2}$ 。（提示：仿照 (1.7.6) 式与 (1.7.7) 式，并利用上题结论。）

附注：仿照 $d = 3$ 时的处理方法，已知当步数分配 $2n_1, 2n_2, 2n_3 \geq n/3$ 时：

$$P(K = 2n_1, L = 2n_2, M = 2n_3, S_{2n} = 0) = P(K = 2n_1, L = 2n_2, M = 2n_3)P(X_{2n_1} = Y_{2n_2} = Z_{2n_3} = 0) \quad (1.7.6)$$

且根据一维游走的估计，当 $n \geq 6n_0$ 时：

$$P(X_{2n_1} = Y_{2n_2} = Z_{2n_3} = 0) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n_3}} \leq \frac{8}{n^{3/2}} \quad (1.7.7)$$

Proof. 设 d 维简单随机游走在 $2n$ 步中，沿第 k 条坐标轴移动的步数为 $2n_k$ ($k = 1, \dots, d$)，则 $\sum_{k=1}^d n_k = n$ 。由多项分布及各维度在给定步数下独立回到原点的特性，有：

$$P_0(S_{2n} = 0) = \sum_{n_1 + \dots + n_d = n} P(2n_1, \dots, 2n_d) \prod_{k=1}^d P(X_{2n_k}^{(k)} = 0)$$

其中 $X^{(k)}$ 表示第 k 维的一维简单随机游走。由 Stirling 公式已知，存在常数 A 使得 $P(X_{2m} = 0) \leq \frac{A}{\sqrt{m}}$ 。

1. 步数均匀分配项的估计

定义集合 $A = \{(n_1, \dots, n_d) : n_k \geq \frac{n}{2d}, \forall k\}$ 。仿照附注中的 (1.7.6) 与 (1.7.7) 式，当步数分配属于 A 时：

$$\prod_{k=1}^d P(X_{2n_k}^{(k)} = 0) \leq \prod_{k=1}^d \frac{A}{\sqrt{n_k}} \leq \prod_{k=1}^d \frac{A}{\sqrt{n/(2d)}} = \frac{(A\sqrt{2d})^d}{n^{d/2}}$$

记常数 $C'_d = (A\sqrt{2d})^d$ ，则这部分的贡献为：

$$\sum_{(n_1, \dots, n_d) \in A} P(2n_1, \dots, 2n_d) \frac{C'_d}{n^{d/2}} \leq \frac{C'_d}{n^{d/2}} \sum_{\text{all}} P(2n_1, \dots, 2n_d) = \frac{C'_d}{n^{d/2}}$$

2. 步数非均匀分配项的控制

考虑补集 A^c ，即存在某个 k 使得 $n_k < \frac{n}{2d}$ 。由于每条轴分配步数的期望 $E[n_k] = \frac{n}{d}$ ，根据第 9 题的大偏差结论，实际步数 n_k 偏离期望值较远的概率是指数量级衰减的。即存在 $\varphi(a) < 1$ 使得：

$$P(A^c) = P\left(\exists k, n_k < \frac{n}{2d}\right) \leq \sum_{k=1}^d P\left(n_k < \frac{1}{2}E[n_k]\right) \leq d \cdot \varphi(a)^n$$

由于 $\prod P(X_{2n_k} = 0) \leq 1$ ，这部分的贡献满足：

$$\sum_{A^c} P(2n_1, \dots, 2n_d) \cdot 1 = P(A^c) \leq d \cdot \varphi(a)^n$$

3. 结论

由于指数衰减速度 $d \cdot \varphi(a)^n$ 远快于多项式衰减 $n^{-d/2}$ ，总和 $P_0(S_{2n} = 0)$ 的阶数由第一部分决定。因此，存在常数 C_d 使得对充分大的 n ：

$$P_0(S_{2n} = 0) \leq \frac{C'_d}{n^{d/2}} + d \cdot \varphi(a)^n \leq \frac{C_d}{n^{d/2}}$$

对于 $d \geq 3$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d/2}$ 收敛，这意味着 $G_{00} = \sum P_0(S_{2n} = 0) < \infty$ ，即 d 维简单随机游走是非常返的。□

11*. 某研究员每隔一段独立同分布的随机时间观察一次实验进度, 间隔时间 ξ 等概率地为 1 分钟, 2 分钟, ..., 30 分钟。假设研究员在某整点进行了一次观察。请问: 平均多长时间后研究员再一次恰好在整点进行观察?

Proof. 设 ξ_1, ξ_2, \dots 为独立同分布的观察间隔, $\xi \sim \text{Unif}\{1, 2, \dots, 30\}$ 。研究员在 $T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ 时刻进行第 n 次观察。题目要求研究员“再一次恰好在整点”观察, 即寻找最小的 $n \geq 1$, 使得 $T_n \equiv 0 \pmod{60}$ 。

令 $X_n = T_n \pmod{60}$ 。由于 ξ_i 独立同分布, $\{X_n\}$ 是状态空间 $S = \{0, 1, \dots, 59\}$ 上的马尔可夫链。由于 $P(\xi = 1) = 1/30 > 0$, 该马氏链是不可约且非周期的。

注意到该游走在循环群 \mathbb{Z}_{60} 上具有平移不变性。其转移概率为 $p_{ij} = P(\xi \equiv j - i \pmod{60})$ 。对于对称 (或双随机) 的不可约有限马氏链, 其不变分布 π 必然是均匀分布:

$$\pi_i = \frac{1}{60}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 59\}$$

令 $N = \min\{n \geq 1 : X_n = 0\}$ 为回到整点所需的观察次数。根据平均回返时间定理:

$$E[N] = E_0[N] = \frac{1}{\pi_0} = 60$$

这意味着研究员平均需要经过 60 次观察, 才能再次在整点相遇。

令 τ 为所需的总时间, 则 $\tau = \sum_{i=1}^N \xi_i$ 。根据 Wald's Identity, 由于 N 是关于 $\{\xi_i\}$ 的停时, 且 $E[\xi_i]$ 有限:

$$E[\tau] = E[N] \cdot E[\xi]$$

已知 ξ 在 $\{1, \dots, 30\}$ 上均匀分布, 其均值为:

$$E[\xi] = \frac{1 + 30}{2} = 15.5 \text{ (分钟)}$$

代入得:

$$E[\tau] = 60 \times 15.5 = 930 \text{ (分钟)}$$

平均 930 分钟 (即 15 小时 30 分钟) 后, 研究员会再次恰好在整点进行观察。 \square

12*. 假设 $\{S_n\}$ 为一维简单随机游走。令 $M_n^{(1)} = S_n$, $M_n^{(2)} = S_n^2 - n$, $M_n^{(3)} = S_n^3 - 3nS_n$, $M_n^{(4)} = S_n^4 - 6nS_n^2 + 3n^2 + 2n$ 。

(1) 证明: $EM_n^{(k)} = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ 。

(2) 假设 τ 是 $\{S_n\}$ 的停时。试给出一个充分条件, 使得 $EM_\tau^{(k)} = 0$ 。(注: $k = 1, 2$ 时, 分别对应瓦尔德等式与瓦尔德第二等式。)

Proof. 设 $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, 其中 ξ_i 独立同分布且 $P(\xi_i = \pm 1) = 1/2$ 。已知 $E\xi_i = 0$, $E\xi_i^2 = 1$, $E\xi_i^3 = 0$, $E\xi_i^4 = 1$ 。我们对 n 使用数学归纳法证明 $EM_n^{(k)} = 0$ 。显然当 $n = 0$ 时, $M_0^{(k)} = 0$ 均成立。假设 $EM_{n-1}^{(k)} = 0$ 成立, 下面证明 $EM_n^{(k)} = 0$:

(1)

• **k=1:** $ES_n = E(S_{n-1} + \xi_n) = ES_{n-1} + E\xi_n = 0 + 0 = 0$ 。

• **k=2:**

$$E(S_n^2 - n) = E(S_{n-1} + \xi_n)^2 - n = E(S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}\xi_n + \xi_n^2) - n$$

利用独立性, $E(S_{n-1}\xi_n) = ES_{n-1}E\xi_n = 0$, 且 $E\xi_n^2 = 1$:

$$E(S_n^2 - n) = ES_{n-1}^2 + 1 - n = ES_{n-1}^2 - (n-1) = EM_{n-1}^{(2)} = 0$$

• **k=3:**

$$E(S_n^3 - 3nS_n) = E(S_{n-1} + \xi_n)^3 - 3nE(S_{n-1} + \xi_n)$$

展开立方项, 利用 $E\xi_n = 0$, $E\xi_n^3 = 0$ 且 $ES_n = 0$:

$$\begin{aligned} E(S_n^3 - 3nS_n) &= E(S_{n-1}^3 + 3S_{n-1}^2\xi_n + 3S_{n-1}\xi_n^2 + \xi_n^3) - 3nES_{n-1} \\ &= ES_{n-1}^3 + 0 + 3ES_{n-1} - 0 - 0 = ES_{n-1}^3 + 3ES_{n-1} \end{aligned}$$

注意到当 $k = 3$ 时, $M_{n-1}^{(3)} = S_{n-1}^3 - 3(n-1)S_{n-1}$ 。代入归纳假设 $E[S_{n-1}^3 - 3(n-1)S_{n-1}] = 0 \implies ES_{n-1}^3 = 3(n-1)ES_{n-1}$ 。故 $EM_n^{(3)} = 0 + 3(0) = 0$ 。

- **k=4:** 展开 $ES_n^4 = E(S_{n-1} + \xi_n)^4 = ES_{n-1}^4 + 6ES_{n-1}^2 E\xi_n^2 + E\xi_n^4 = ES_{n-1}^4 + 6ES_{n-1}^2 + 1$ 。由 $k=2$ 的结论知 $ES_{n-1}^2 = n-1$ 。则：

$$ES_n^4 = ES_{n-1}^4 + 6(n-1) + 1 = ES_{n-1}^4 + 6n - 5$$

代入 $M_n^{(4)}$ 的定义：

$$\begin{aligned} EM_n^{(4)} &= ES_n^4 - 6nES_n^2 + 3n^2 + 2n \\ &= (ES_{n-1}^4 + 6n - 5) - 6n(n) + 3n^2 + 2n \\ &= ES_{n-1}^4 - 3n^2 + 8n - 5 \end{aligned}$$

根据归纳假设 $EM_{n-1}^{(4)} = 0 \implies ES_{n-1}^4 = 6(n-1)ES_{n-1}^2 - 3(n-1)^2 - 2(n-1)$ 。代入 $ES_{n-1}^2 = n-1$ 计算得：

$$ES_{n-1}^4 = 6(n-1)^2 - (3n^2 - 6n + 3) - (2n - 2) = 3n^2 - 8n + 5$$

代回原式： $EM_n^{(4)} = (3n^2 - 8n + 5) - 3n^2 + 8n - 5 = 0$ 。

(2) 若要使 $EM_\tau^{(k)} = 0$ ，对于停时 τ 的常用充分条件是：

1. **有界性:** τ 是有界停时 (存在 T 使得 $\tau \leq T$ a.s.)。在这种情况下，我们可以通过对 $M_{\min(n,\tau)}^{(k)}$ 取极限并利用有界收敛定理得到结果。
2. **吸收性质:** 若随机游走在有限区间 $[a, b]$ 内运行直到被边界吸收，且 $E\tau < \infty$ 。此时 $S_{n \wedge \tau}$ 是有界的，对于多项式形式的 $M_n^{(k)}$ ，这种有界性足以保证期望的平稳性。

□

1.8 遍历定理与正常返

1. 对于马氏链而言，“不可约”是不变分布唯一的必要条件吗？如果是，试证明之；如果不是，试将其改为一个必要条件。

Proof. “不可约”不是“不变分布唯一”的必要条件。事实上，不可约与不变分布唯一之间既不充分也不必要。马氏链的不变分布唯一，**当且仅当**该马氏链分解成若干互通类之后，**有且仅有一个**互通类是正常返的。

1. **如果马氏链是不可约的:** 此时全空间只有一个互通类，该类只可能具有三种状态之一：非常返、零常返或正常返。
 - 只有当该类是“正常返”时，才存在唯一的不变分布。
 - 若为非常返或零常返，则不存在不变分布。
2. **如果马氏链是可约的:** 此时存在多个互通类 (互通类不一定是闭集)。对于每一个互通类，讨论其常返性：
 - 若一个互通类是常返的，则该类必然是闭集。
 - **不存在正常返类:** 不变分布不存在。
 - **存在唯一的正常返类:** 马氏链最终一定会停留在该类中，此时存在唯一的不变分布。
 - **存在不止一个正常返类:** 假设存在多个正常返类 C_1, C_2, \dots ，每个类上都有各自唯一的不变分布。通过在其余状态添加 0 扩展到整个空间上，并做系数和为 1 的线性组合，可以得到无穷多个不变分布。此时不变分布不唯一。

“不可约”要求只有一个互通类，而“不变分布唯一”只要求只有一个正常返的互通类。因此不可约不是必要条件。 □

2. 假设状态空间 S 有限。证明：

- (1) 存在正常返态；
- (2) 存在不变分布。

Proof. 由于状态空间 S 有限, 我们可以通过以下步骤进行证明:

(1) 首先, 在有限状态空间中, 必然存在常返态。设 $A \subseteq S$ 是一个不可约闭集 (即一个常返类)。在该类中, 所有状态的性质相同, 即同为正常返或同为零常返。

若 A 为零常返类, 则对于该类中任意状态 $i \in A$, 其平均回返时间 $E_i \sigma_i = \infty$ 。根据遍历定理, 状态 i 在前 n 步中出现的频率满足:

$$\frac{V_i(n)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1}{E_i \sigma_i} = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

由于 A 是一个闭集, 马氏链一旦进入 A 便不再离开。如果我们从 A 中的某个状态出发, 则在每一步中系统必然处于 A 中的某个状态, 因此恒有:

$$\sum_{i \in A} \frac{V_i(n)}{n} = 1$$

然而, 由于 S 是有限集, 其子集 A 也是有限的。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有限个趋于 0 的项之和必须趋于 0:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in A} \frac{V_i(n)}{n} = \sum_{i \in A} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_i(n)}{n} \right) = \sum_{i \in A} 0 = 0$$

矛盾, 故 A 中必然存在正常返态。

(2) 由上述结论可知, 状态空间 S 中至少存在一个正常返的不可约闭集 A 。

在该类 A 上, 我们可以定义一个局部的不变分布。对于任意 $i \in A$, 令:

$$\pi_i = \frac{1}{E_i \sigma_i}$$

由正常返性可知 $E_i \sigma_i < \infty$, 故 $\pi_i > 0$ 。对于不属于该类的状态, 即任意 $j \in S \setminus A$, 我们令:

$$\pi_j = 0$$

构造向量 $\pi = (\pi_k)_{k \in S}$ 。由于 A 是闭集 (即对于 $i \in A, j \notin A$, 有 $p_{ij} = 0$), 且 π_A 是类 A 内部的不变分布, 不难验证该向量满足不变方程 $\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j$ 以及规范化条件 $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ 。因此, 不变分布存在。 \square

3. 仿照命题 1.8.4, 证明: 例 1.8.16 中的 $\{E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} : i \in S\}$ 是不变测度。(注: 将其归一化可得 (1.8.9) 式的另一个证明。)

命题 1.8.4 假设 \circ 常返, 则如上定义的 μ 满足下面的不变方程:

$$\sum_{j \in S} \mu_j p_{ji} = \mu_i, \quad \forall i \in S.$$

例 1.8.16 假设马氏链不可约、正常返。对给定的正整数 m , 令 $\sigma := \inf\{n \geq m : X_n = i\}$, 则

$$E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} = \pi_j E_i \sigma. \quad (1.8.9)$$

Proof. 对任意固定状态 $i \in S$, 定义测度 $\mu = (\mu_j)_{j \in S}$ 为:

$$\mu_j = E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j, \sigma > n)$$

其中 $\sigma = \inf\{n \geq m : X_n = i\}$ 。我们需要证明对于任意 $k \in S$, 满足 $\sum_{j \in S} \mu_j p_{jk} = \mu_k$ 。

根据 μ_j 的定义并利用全概率公式:

$$\sum_{j \in S} \mu_j p_{jk} = \sum_{j \in S} \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j, \sigma > n) P(X_{n+1} = k | X_n = j)$$

由于事件 $\{\sigma > n\}$ 仅由时刻 n 及其之前的状态决定, 由马氏性知:

$$P(X_{n+1} = k | X_n = j) = P(X_{n+1} = k | X_n = j, \sigma > n)$$

于是上式可化为:

$$\sum_{j \in S} \mu_j p_{jk} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in S} P_i(X_n = j, \sigma > n, X_{n+1} = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(\sigma > n, X_{n+1} = k)$$

将上述概率和写回期望形式:

$$\sum_{j \in S} \mu_j P_{jk} = E_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\sigma > n, X_{n+1}=k\}} = E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=k\}}$$

令 $l = n + 1$ 进行指标平移, 得到:

$$\sum_{j \in S} \mu_j P_{jk} = E_i \sum_{l=1}^{\sigma} \mathbf{1}_{\{X_l=k\}}$$

根据 σ 的定义, 在 $n = 0$ 时 $X_0 = i$, 而在 $n = \sigma$ 时 $X_{\sigma} = i$ 。

• 若 $k \neq i$: 由于 $X_0 = i$ 且 $X_{\sigma} = i$, 则 $\mathbf{1}_{\{X_0=k\}} = 0$ 且 $\mathbf{1}_{\{X_{\sigma}=k\}} = 0$ 。此时:

$$\sum_{l=1}^{\sigma} \mathbf{1}_{\{X_l=k\}} = \sum_{l=1}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_l=k\}} = \sum_{l=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_l=k\}}$$

• 若 $k = i$: 在时刻 0 和时刻 σ 状态均为 i , 即 $\mathbf{1}_{\{X_0=i\}} = 1$ 且 $\mathbf{1}_{\{X_{\sigma}=i\}} = 1$ 。此时:

$$\sum_{l=1}^{\sigma} \mathbf{1}_{\{X_l=i\}} = \left(\sum_{l=1}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_l=i\}} \right) + 1 = \sum_{l=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_l=i\}}$$

综上所述, 对任意 $k \in S$, 总有:

$$\sum_{j \in S} \mu_j P_{jk} = E_i \sum_{l=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_l=k\}} = \mu_k$$

故 μ 为不变测度。

由于马氏链不可约且正常返, 不变分布 π 唯一。将 μ 归一化可得 $\pi_j = \mu_j / \sum_{k \in S} \mu_k$ 。因为 $\sum_{k \in S} \mu_k = E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} 1 = E_i \sigma$, 所以 $\pi_j = \frac{E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}}{E_i \sigma}$ 。变形即得 (1.8.9) 式: $E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} = \pi_j E_i \sigma$ 。□

4. 某考试从题库中随机选取 100 道判断题。若某题的正确答案为“是”, 则下一题的正确答案为“是”的概率为 0.6; 若某题的正确答案为“否”, 则下一题的正确答案为“是”的概率为 0.5。某学生把所有题都独立地以概率 p 回答“是”, 以概率 $1 - p$ 回答“否”。

- (1) 建立马氏链模型刻画该学生每道题回答正确与否;
- (2) 试估计该学生的得分;
- (3) 求 p 的最优选择。

Proof. (1) 设状态空间 $S = \{0, 1\}$, 其中 0 代表正确答案为“否”, 1 代表正确答案为“是”。根据题意, 正确答案序列 $\{X_n\}$ 构成一个马氏链, 其一步转移矩阵为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

求解平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1)$, 由 $\pi \mathbf{P} = \pi$ 及 $\pi_0 + \pi_1 = 1$ 可得:

$$\begin{cases} 0.5\pi_0 + 0.4\pi_1 = \pi_0 \\ 0.5\pi_0 + 0.6\pi_1 = \pi_1 \end{cases} \implies \pi_1 = \frac{5}{4}\pi_0 \implies \pi = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right)$$

设 Y_n 为学生第 n 道题的回答, 答“是”为 1, 答“否”为 0。答题正确与否记为 $Z_n = \mathbb{1}_{\{X_n=Y_n\}}$ 。

由于 Z_n 的概率分布依赖于 X_n 的状态, 且 X_n 构成马氏链, 我们构造联合随机过程 $W_n = (X_n, Z_n)$ 。其状态空间为 $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ 。由题意, $\{X_n\}$ 的转移矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ 。学生独立回答 $P(Y_n = 1) = p$ 。则 W_n 构成了状态空间 S 上的马氏链, 其转移概率为:

$$P((X_{n+1}, Z_{n+1}) | (X_n, Z_n)) = P(X_{n+1} | X_n) \cdot P(Z_{n+1} | X_{n+1})$$

代入数据，其一步转移矩阵 \mathbf{Q} 为：

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.5p & 0.5(1-p) & 0.5(1-p) & 0.5p \\ 0.5p & 0.5(1-p) & 0.5(1-p) & 0.5p \\ 0.4p & 0.4(1-p) & 0.6(1-p) & 0.6p \\ 0.4p & 0.4(1-p) & 0.6(1-p) & 0.6p \end{pmatrix}$$

该模型通过 W_n 的第二分量完整刻画了每道题回答正确与否的演化过程。

(2) 设答题总次数为 n ，其中答案为“否”的次数为 $V_0(n)$ ，答案为“是”的次数为 $V_1(n)$ 。学生以概率 p 回答“是”，以 $1-p$ 回答“否”。则在答案为 0 时答对的条件概率为 $E[Z_n|X_n=0] = 1-p$ ；在答案为 1 时答对的条件概率为 $E[Z_n|X_n=1] = p$ 。

设总得分为 $F(n) = F_0(n) + F_1(n)$ ，其中 F_0, F_1 分别为在答案为“否”和“是”时的得分。根据遍历定理，平均得分满足：

$$\frac{F_0(n)}{n} = \frac{V_0(n)}{n} \cdot \frac{F_0(n)}{V_0(n)} \rightarrow \pi_0(1-p)$$

$$\frac{F_1(n)}{n} = \frac{V_1(n)}{n} \cdot \frac{F_1(n)}{V_1(n)} \rightarrow \pi_1 p$$

故每道题的平均得分期望为：

$$\frac{F(n)}{n} \rightarrow \pi_0(1-p) + \pi_1 p = \frac{4}{9}(1-p) + \frac{5}{9}p = \frac{4+p}{9}$$

对于 100 道题，该学生的估计得分为 $100 \times \frac{4+p}{9} = \frac{400+100p}{9}$ 。

(3) 若希望最大化平均得分 $\frac{F(n)}{n} = \frac{4+p}{9}$ ，由于 $0 \leq p \leq 1$ ，该函数关于 p 单调递增。因此，最优选择为 $\hat{p} = 1$ 。即学生全部回答“是”时，期望得分最高。 \square

5. 假设 $\{S_n\}$ 是一维随机游动，步长分布为 $P(\xi = k) = 1/6, k = 1, \dots, 6$ 。令 $A_n = \{S_n \text{ 能被 } 13 \text{ 整除}\}$ 。试求： $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(A_n)$ 。

Proof. 考虑在 $(\text{mod } 13)$ 下的状态空间 $S = \{0, 1, \dots, 12\}$ 。

令 $\tilde{X}_n = S_n \pmod{13}$ ，则 $\{\tilde{X}_n\}$ 是 S 上的马氏链。事件 A_n 发生当且仅当 $\tilde{X}_n = 0$ 。

方法 1：利用极限矩阵

目标求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{X}_n = 0 | \tilde{X}_0 = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{00}^{(n)}$ 。

设该链的转移矩阵为 $\tilde{\mathbf{P}}$ ，其平稳分布为 π 。由于该链是不可约且非周期的，其极限矩阵满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}}^n = \mathbf{1}\pi^T$ 。

因此， $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{00}^{(n)} = \pi_0$ 。

理论上可以解出 π 为均匀分布。

方法 2：利用双随机矩阵性质

由于步长 ξ 在 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上均匀分布，对于任意状态 $j \in S$ ，其转移概率 \tilde{p}_{ij} 仅取决于 $j - i \pmod{13}$ 。

不难验证转移矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}$ 是**双随机矩阵**，即满足：

$$\sum_{j=0}^{12} \tilde{p}_{ij} = 1, \quad \sum_{i=0}^{12} \tilde{p}_{ij} = 1$$

对于有限状态的双随机矩阵，其平稳分布 π 必为均匀分布。故：

$$\pi_i = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{13}, \quad \forall i \in \{0, \dots, 12\}$$

由于该链不可约且非周期，由强遍历定理知：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(A_n) = \pi_0 = \frac{1}{13}$$

\square

注：关于非周期性的判断

性质：不可约马氏链中，只要存在一个状态是非周期的，则所有状态均为非周期的。

不妨设状态 i 是非周期的，若满足 $p_{ii} > 0$ ，或者存在两个可能的回路长度 m, n 使得 $\text{gcd}(m, n) = 1$ （根据裴蜀定理，这保证了步数足够大时可以回到原点）。

本题：在 $(\text{mod } 13)$ 下，可以由 $2+2+2+2+2+3 = 13$ 步回到 0，也可以由 $2 \times 6 + 1 = 13$ 步回到 0。更简单地，步长包含 1，且 $1 \times 13 = 13$ 以及 $2 \times 6 + 1 = 13$ 等路径长度互质，故是非周期的。

6. 假设 $\{X_n\}$ 是离散圆周 S_N 上的随机游动 (参见例 1.2.8)。试用两种不同的方法求 $E_0\sigma_0$ 。

Proof. 离散圆周 S_N 上的随机游动状态空间为 $\{0, 1, \dots, N-1\}$, 转移概率为 $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ 。

方法 1: 利用双随机矩阵性质

显然, 该转移矩阵 \mathbf{P} 是双随机矩阵 (每行每列之和均为 1)。对于有限状态空间且不可约的马氏链, 其不变分布 π 必为均匀分布:

$$\pi_i = \frac{1}{N}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

根据正常返态的性质, 平均回返时间 $E_0\sigma_0$ 等于平稳分布对应分量的倒数:

$$E_0\sigma_0 = \frac{1}{\pi_0} = N$$

方法 2: 首步分析法

设 $e_i = E_i\sigma_0$ 为从状态 i 出发首次到达 (或回到) 状态 0 的期望步数。特别地, 对于 e_0 , 其定义为回返时间, 而对于其他状态 $i \neq 0$, 则为首次到达时间。

根据首步分析法, 我们列出线性方程组:

$$\begin{cases} e_0 = 1 + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_{N-1} \\ e_1 = 1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_0 \\ \vdots \\ e_i = 1 + \frac{1}{2}e_{i+1} + \frac{1}{2}e_{i-1} \\ \vdots \\ e_{N-1} = 1 + \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}e_{N-2} \end{cases}$$

在计算从 $i \neq 0$ 到达 0 的期望时间时, 一旦进入状态 0 过程即结束, 故在上述 e_1 至 e_{N-1} 的方程中, 应取 $e_0 = 0$ (作为吸收边界条件)。此时方程组变为:

$$e_i = 1 + \frac{1}{2}e_{i+1} + \frac{1}{2}e_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \text{ 其中 } e_0 = e_N = 0$$

该差分方程的解为 $e_i = i(N-i)$ 。将结果代入第一行关于回返时间的方程中:

$$\hat{e}_0 = 1 + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_{N-1} = 1 + \frac{1}{2}(1 \cdot (N-1)) + \frac{1}{2}((N-1) \cdot 1)$$

$$\hat{e}_0 = 1 + \frac{N-1}{2} + \frac{N-1}{2} = 1 + N-1 = N$$

综上所述, $E_0\sigma_0 = N$ 。 □

7. 假设 d 为整数且 $d \geq 2, p_0, p_1, \dots, p_{d-1} \in (0, 1), \{X_n\}$ 是 \mathbb{Z} 上的马氏链, 转移概率为

$$p_{nd+i, nd+i+1} = p_i, \quad p_{nd+i, nd+i-1} = 1 - p_i,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \dots, d-1\}.$$

证明: X_n/n 几乎必然收敛。(提示: 取 $Y_n \in S = \{0, 1, \dots, d-1\}$ 满足 $Y_n \equiv X_n \pmod{d}$, 则 $\{Y_n\}$ 是 S 上的马氏链。)

Proof. 按照提示, 取 $\{Y_n\}$ 为 $S = \{0, 1, \dots, d-1\}$ 上的随机过程, 满足 $Y_n \equiv X_n \pmod{d}$ 。

由于 $\{X_n\}$ 的转移概率仅取决于其模 d 的余数, 易知 $\{Y_n\}$ 是 S 上的马氏链, 其转移概率矩阵为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 & 0 & \dots & 0 & 1-p_0 \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{d-1} & 0 & 0 & \dots & 1-p_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $p_i \in (0, 1)$, 该链 $\{Y_n\}$ 是不可约且非周期的。由有限状态马氏链理论知, 它存在唯一的不变分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{d-1})$ 。

考虑 $X_n - X_{n-1}$ 的取值。当 $\{X_n\}$ 跨越 nd 的边界时，其增量在 $\{Y_n\}$ 中体现为从 $d-1$ 跳向 0 或从 0 跳向 $d-1$ 。具体地，有如下分解式：

$$X_n - X_{n-1} = Y_n - Y_{n-1} + d \cdot \mathbf{1}_{\{(Y_{n-1}, Y_n) = (d-1, 0)\}} - d \cdot \mathbf{1}_{\{(Y_{n-1}, Y_n) = (0, d-1)\}}$$

通过累加可得：

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})$$

$$\frac{X_n}{n} = \frac{Y_n}{n} + \frac{X_0 - Y_0}{n} + \frac{d}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}_{\{(Y_{i-1}, Y_i) = (d-1, 0)\}} - \mathbf{1}_{\{(Y_{i-1}, Y_i) = (0, d-1)\}})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时：

- 因为 Y_n 在有限集 S 中取值，故 $\frac{Y_n}{n} \rightarrow 0$ 。
- 初始项 $\frac{X_0 - Y_0}{n} \rightarrow 0$ 。
- 根据马氏链的遍历定理，状态转移发生的频率几乎必然收敛到平稳分布下的联合概率：

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{(Y_{i-1}, Y_i) = (d-1, 0)\}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_{d-1} p_{d-1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{(Y_{i-1}, Y_i) = (0, d-1)\}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_0 (1 - p_0)$$

综上所述， X_n/n 几乎必然收敛，且极限值为：

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} d(p_{d-1}\pi_{d-1} - (1 - p_0)\pi_0)$$

□

8. 在例 1.8.15 中，证明：

(1) $\{Y_n\}$ 是 $\tilde{S} := \{(i, j) : p_{ij} > 0\}$ 上的马氏链，转移概率为

$$\tilde{p}_{(i,j)(l,k)} = \begin{cases} p_{jk}, & \text{若 } j = l \\ 0, & \text{若 } j \neq l \end{cases}$$

(2) 若 $\{X_n\}$ 不可约（常返，或正常返），则 $\{Y_n\}$ 也相应地不可约（常返，或正常返）。

例 1.8.15 假设 $\{X_n\}$ 是马氏链，状态空间为 S ，转移矩阵 \mathbf{P} 不可约、正常返。对任意 $i, j \in S$ ，考虑从 i 到 j 的跳跃出现的频率

$$f_{ij}(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m = i, X_{m+1} = j\}},$$

则 $f_{ij}(n)$ 几乎必然收敛于 $\pi_i p_{ij}$ 。

Proof. 考虑 $\{Y_n = (X_n, X_{n+1})\}$ 为定义在状态空间 $\tilde{S} = \{(i, j) \in S \times S : p_{ij} > 0\}$ 上的随机过程。

(1) 我们需要考察从当前状态 (i, j) 转移到下一时刻状态 (l, k) 的概率。由马氏性可知：

$$P(Y_{n+1} = (l, k) | Y_n = (i, j)) = P(X_{n+1} = l, X_{n+2} = k | X_n = i, X_{n+1} = j)$$

- 若 $j \neq l$ ：由于在 Y_n 中已经确定 $X_{n+1} = j$ ，在 Y_{n+1} 中要求 $X_{n+1} = l$ ，若 $j \neq l$ ，则该概率显然为 0。
- 若 $j = l$ ：根据马氏性，该概率仅取决于当前状态 X_{n+1} ：

$$P(X_{n+2} = k | X_{n+1} = j) = p_{jk}$$

综上所述，转移概率 $\tilde{p}_{(i,j)(l,k)}$ 满足：

$$\tilde{p}_{(i,j)(l,k)} = \begin{cases} p_{jk}, & \text{若 } j = l \\ 0, & \text{若 } j \neq l \end{cases}$$

这说明 $\{Y_n\}$ 的未来仅取决于当前状态，故 $\{Y_n\}$ 是 \tilde{S} 上的马氏链。

(2) **A. 不可约性：**若 $\{X_n\}$ 不可约，即 S 中任意两个状态互通。任取 $(i, j), (k, l) \in \tilde{S}$ ，由于 X_n 不可约，存在 $m > 0$ 使得 $p_{jk}^{(m)} > 0$ 。根据转移构造：

$$\tilde{p}_{(i,j)(k,l)}^{(m+1)} = p_{jk}^{(m)} p_{kl} > 0$$

同理可证反向互通，故 $\{Y_n\}$ 也不可约。

B. 常返性：若 $\{X_n\}$ 常返，计算 $\{Y_n\}$ 中状态 (i, j) 的格林函数：

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}_{(i,j) \rightarrow (i,j)}^{(m)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ij} = p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)}$$

利用首达分解式 $p_{ji}^{(m)} = \sum_{k=0}^m P_j(\sigma_i = k) p_{ii}^{(m-k)}$ ，展开得：

$$p_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} P_j(\sigma_i = k) \sum_{m=k}^{\infty} p_{ii}^{(m-k)} = p_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} P_j(\sigma_i = k) \sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(l)}$$

由于 $\{X_n\}$ 常返，级数 $\sum p_{ii}^{(l)} = \infty$ 。因为 $\{X_n\}$ 不可约且常返，必有 $P_j(\sigma_i < \infty) = 1$ ，且 $p_{ij} > 0$ 。因此格林函数之和为 ∞ ，证明 $\{Y_n\}$ 也是常返的。

C. 正常返性：若 $\{X_n\}$ 正常返，则存在唯一不变分布 π 。对于 $\{Y_n\}$ ，可以构造分布 $\tilde{\pi}_{(i,j)} = \pi_i p_{ij}$ 。容易验证 $\sum_{(i,j) \in \tilde{S}} \tilde{\pi}_{(i,j)} = \sum_i \pi_i \sum_j p_{ij} = 1$ ，且满足不变方程。存在不变分布意味着不可约链是正常返的。 \square

9. 假设 $\{X_n\}$ 是不可约、正常返马氏链， π 为其不变分布。用两种不同方法证明：对任意 $l \geq 1, i_0, \dots, i_l \in S$,

$$\frac{1}{n} |\{0 \leq m \leq n-1 : X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+l} = i_l\}| \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{l-1} i_l}$$

Proof. **方法 1：构造高维马氏链**

令 $Y_n = (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+l})$ 为定义在状态空间 S^{l+1} 上的随机过程。

类似于例 1.8.15 中对二元组 (X_n, X_{n+1}) 的讨论，易知 $\{Y_n\}$ 是一个马氏链。由于 $\{X_n\}$ 不可约且正常返，可以推得 $\{Y_n\}$ 也是不可约且正常返的马氏链。

$\{Y_n\}$ 的平稳分布为 $\tilde{\pi}_{(j_0, \dots, j_l)} = \pi_{j_0} p_{j_0 j_1} \dots p_{j_{l-1} j_l}$ 。

对 $\{Y_n\}$ 使用遍历定理，路径出现的频率几乎必然收敛于其平稳分布对应分量：

$$LHS = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{Y_m = (i_0, i_1, \dots, i_l)\}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \tilde{\pi}_{(i_0, \dots, i_l)} = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{l-1} i_l}$$

方法 2：游弋分解与更新定理

考虑从 i_0 出发并返回 i_0 的游弋。

设在前 n 步中，状态 i_0 出现的次数（即完整游弋的个数）为 $V(n)$ 。将 LHS 分解为：

$$LHS = \frac{V(n)}{n} \cdot \frac{1}{V(n)} |\{0 \leq m \leq n-1 : X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+l} = i_l\}|$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，我们分别考察两项的几乎必然 (a.s.) 极限：

1. 第一项：由 $\{X_n\}$ 的遍历定理可知， $\frac{V(n)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_{i_0}$ 。
2. 第二项：由强马氏性，每个游弋内从 i_0 开始的前 l 步路径是相互独立的。根据强大数定律，该项几乎必然收敛于从 i_0 出发走完该特定路径的概率：

$$P(X_1 = i_1, \dots, X_l = i_l | X_0 = i_0) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{l-1} i_l}$$

两项相乘即得 $LHS \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{l-1} i_l}$ \square

10. 考虑从 i 出发的马氏链第 r 次回访 i 的时间 T_r , 其中 $T_0 := 0$ 。令 $\xi_r = \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}}$, $r = 1, 2, \dots$ 。试仿照例 1.8.17 给出例 1.8.15 的另一证明。

Proof. 考虑状态 i 到 j 的跳跃频率 $f_{ij}(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}}$ 。设 T_r 为马氏链第 r 次回访状态 i 的时刻 ($T_0 = 0$)。在前 n 步中, 假设马氏链共经历了 $r_i(n)$ 次完整的从 i 出发并返回 i 的游弋。

我们可以将求和式改写为关于游弋的累加。由于跳跃 $\{X_m = i, X_{m+1} = j\}$ 只能发生在马氏链处于状态 i 的时刻, 而在每个游弋中, 马氏链恰好在起始时刻处于状态 i 。因此:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}} = \frac{r_i(n)}{n} \cdot \frac{1}{r_i(n)} \left(\sum_{r=1}^{r_i(n)} \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}}=i, X_{T_{r-1}+1}=j\}} + \varepsilon_n \right)$$

其中 ε_n 是误差项, 代表在最后一个不完整游弋中 (若 X_n 尚未回到 i) 发生的 $i \rightarrow j$ 跳跃次数。显然对于任意 n , 有 $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$

令 $\xi_r = \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}}$ 。由于 $X_{T_{r-1}}$ 恒等于 i , 上式简化为:

$$f_{ij}(n) = \frac{r_i(n)}{n} \cdot \frac{1}{r_i(n)} \left(\sum_{r=1}^{r_i(n)} \xi_r + \varepsilon_n \right)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 我们分别考察这两项的几乎必然 (a.s.) 极限:

- **第一项 (访问频率):** 根据马氏链的遍历定理, 状态 i 出现的频率收敛于平稳分布:

$$\frac{r_i(n)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_i$$

- **第二项 (条件跳跃概率):** 根据强马氏性, 每一个游弋的起始步是相互独立的。 ξ_1, ξ_2, \dots 是独立同分布 (i.i.d.) 的随机变量, 且其期望为:

$$E[\xi_r] = P(X_{T_{r-1}+1} = j \mid X_{T_{r-1}} = i) = p_{ij}$$

根据强大数定律 (SLLN):

$$\frac{1}{r_i(n)} \sum_{r=1}^{r_i(n)} \xi_r \xrightarrow{\text{a.s.}} E[\xi_1] = p_{ij}$$

综合上述两项极限, 得:

$$f_{ij}(n) \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_i \cdot p_{ij}$$

□

11. 假设马氏链不可约, 其转移矩阵 \mathbf{P} 是幂等的, 即 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ 。证明: 对于任意状态 $i, j, p_{ij} = p_{jj}$ 。

Proof. 对于任意概率分布 (行向量) μ , 由 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ 可得:

$$(\mu\mathbf{P})\mathbf{P} = \mu\mathbf{P}^2 = \mu\mathbf{P}$$

令 $\pi = \mu\mathbf{P}$, 则上式表明 $\pi\mathbf{P} = \pi$ 。这说明对于任意初始分布 μ , 经过一步转移后的向量 $\mu\mathbf{P}$ 都是该马氏链的不变分布。

由于马氏链不可约, 若存在不变分布, 则该不变分布是唯一的。设该唯一的不变分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ 。由上述分析可知, 无论取什么样的初始分布 μ , $\mu\mathbf{P}$ 必然等于这个唯一的 π 。

对于任意状态 i , 取初始分布 $\mu^{(i)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, 即仅在第 i 个分量处为 1。则:

$$\mu^{(i)}\mathbf{P} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ij}, \dots)$$

根据唯一性, 对于所有的 i , 都有:

$$\mu^{(i)}\mathbf{P} = \pi$$

这意味着转移矩阵 \mathbf{P} 的每一行都相等, 即对于任意状态 i, k , 有 $p_{ij} = p_{kj} = \pi_j$ 。

特别地, 取 $k = j$, 则有:

$$p_{ij} = p_{jj}$$

对于任意 i, j 均成立。

□

12. 假设 $\{X_n\}$ 是 N 个顶点的完全图上的随机游走。

(1) 求 $P_i(\sigma_i = n), n = 1, 2, \dots$, 并由此计算 $E_i\sigma_i$ 。

(2) 根据不变分布的定义列方程并解出 π , 然后验证 (1.8.1) 式。

$$\pi_i = \frac{1}{E_i\sigma_i} \quad (1.8.1)$$

(注: 在完全图中, 任意两个不同的顶点之间有且仅有一条边相连。)

Proof. (1) 在 N 个顶点的完全图中, 每个顶点的度数均为 $N-1$ 。由于不存在自环, 从任意顶点 i 出发, 下一步跳回 i 的概率 $p_{ii} = 0$, 即 $P_i(\sigma_i = 1) = 0$ 。若要在第 n 步 ($n \geq 2$) 首次回到 i , 则前 $n-1$ 步必须在除 i 之外的 $N-1$ 个顶点中游走。

具体而言, 第一步必跳向其他 $N-1$ 个顶点之一, 概率为 1; 随后的第 2 步到第 $n-1$ 步, 每一跳都必须避开 i , 在剩余的 $N-2$ 个非 i 顶点中选择, 概率为 $\frac{N-2}{N-1}$; 最后在第 n 步由当前顶点跳回 i , 概率为 $\frac{1}{N-1}$ 。因此, 首次回访分布为:

$$P_i(\sigma_i = n) = \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{N-1}, \quad n \geq 2$$

接下来计算平均回返时间 $E_i\sigma_i$:

$$E_i\sigma_i = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P_i(\sigma_i = n) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n-2}$$

令 $q = \frac{N-2}{N-1}$, 则该级数可表示为 $\frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^{\infty} nq^{n-2}$ 。

利用幂级数求和公式 $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, 可知 $\sum_{n=2}^{\infty} nq^{n-2} = \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{q-1}{(1-q)^2} = \frac{2-q}{(1-q)^2}$ 。

代入 $q = \frac{N-2}{N-1}$ 得 $1-q = \frac{1}{N-1}$, 故:

$$E_i\sigma_i = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1 + \frac{1}{N-1}}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^2} = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{N}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^2} = N$$

(2) 完全图的转移矩阵 \mathbf{P} 对角线元素为 0, 其余元素均为 $\frac{1}{N-1}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N-1} & \cdots & \frac{1}{N-1} \\ \frac{1}{N-1} & 0 & \cdots & \frac{1}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N-1} & \frac{1}{N-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

根据不变分布的定义方程 $\pi\mathbf{P} = \pi$, 对于任意状态 j , 有:

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \neq j} \pi_i \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N-1} (1 - \pi_j)$$

由此解得对所有状态 $j \in S$, 其不变分布分量均为:

$$\pi_j = \frac{1}{N}$$

根据前文计算结果, $\pi_i = \frac{1}{N}$ 且 $E_i\sigma_i = N$ 。显然满足:

$$\pi_i = \frac{1}{N} = \frac{1}{E_i\sigma_i}$$

验证完毕。 □

13*. 假设 $\{X_n\}$ 是 N 个顶点的完全图上的随机游走。将 $\{X_n\}$ 走遍所有顶点的时间记为 T , 即 $T = \max_{i \in S} \tau_i$ 。求 $E_i T$ 。

Proof. 设 T_k 为系统已经访问了 k 个不同的顶点后, 直到访问到一个新的 (第 $k+1$ 个) 顶点所需要的时间。显然, 走遍所有 N 个顶点所需的总时间为:

$$T = \sum_{k=1}^{N-1} T_k$$

当系统已经访问了 k 个顶点时, 剩余未访问的顶点数为 $N-k$ 。在完全图中, 由于从当前顶点跳向任一其他顶点的概率均为 $\frac{1}{N-1}$, 因此下一步跳向“新顶点”的概率为:

$$p_k = \frac{N-k}{N-1}$$

由于 T_k 服从成功概率为 p_k 的几何分布, 其期望值为概率的倒数:

$$E(T_k) = \frac{1}{p_k} = \frac{N-1}{N-k}$$

由期望的线性性质, 可得总时间的期望值为:

$$E_i T = \sum_{k=1}^{N-1} E(T_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-1}{N-k}$$

令 $i = N-k$, 当 k 从 1 遍历到 $N-1$ 时, i 同样从 $N-1$ 遍历到 1。于是上式可化简为:

$$E_i T = (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}$$

即完全图上的覆盖时间期望正比于谐波级数 H_{N-1} 。 □

14*. 假设某马氏链不可约、正常返, 并假设观察该马氏链 n 步, 依次得到状态 i_0, \dots, i_n 。

(1) 求该马氏链的转移概率矩阵的最大似然估计 $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{ij})_{S \times S}$ 。

(2) 证明: 最大似然估计 $\hat{\mathbf{P}}$ 具有强相合性。

Proof. (1) 给定观察序列 i_0, i_1, \dots, i_n , 似然函数 \mathcal{L} 定义为该路径发生的概率:

$$\mathcal{L} = P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \prod_{k=0}^{n-1} P(X_{k+1} = i_{k+1} | X_k = i_k)$$

利用指示函数 $\mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}$, 可将连乘项改写为:

$$\mathcal{L} = P(X_0 = i_0) \prod_{i \in S} \prod_{j \in S} p_{ij}^{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}}$$

为了求最大值, 取对数似然函数并引入拉格朗日乘子 λ_i (约束条件为 $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$):

$$\ell = \ln \mathcal{L} - \sum_{i \in S} \lambda_i \left(\sum_{j \in S} p_{ij} - 1 \right)$$

$$\ell = \ln P(X_0 = i_0) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}} \right) \ln p_{ij} - \sum_{i \in S} \lambda_i \left(\sum_{j \in S} p_{ij} - 1 \right)$$

对 p_{ij} 求偏导并令其为 0:

$$\frac{\partial \ell}{\partial p_{ij}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}}{p_{ij}} - \lambda_i = 0 \implies p_{ij} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}}{\lambda_i}$$

利用约束条件 $\sum_j p_{ij} = 1$, 可解得 $\lambda_i = \sum_{j \in S} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}$ 。由此得到最大似然估计量为:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}}{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}}$$

该式直观上即为从状态 i 转移到 j 的次数除以从 i 出发的总次数。

(2) 强相合性是指当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{p}_{ij} \xrightarrow{a.s.} p_{ij}$ 。根据不可约正常返马氏链的遍历定理, 我们有:

- 分子部分: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}} \xrightarrow{a.s.} \pi_i p_{ij}$
- 分母部分: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}} \xrightarrow{a.s.} \pi_i$

结合上述两个极限, 可得:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}}{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}} \xrightarrow{a.s.} \frac{\pi_i p_{ij}}{\pi_i} = p_{ij}$$

由于对于所有 i, j , 上述几乎必然收敛均成立, 故最大似然估计 $\hat{\mathbf{P}}$ 具有强相合性。 □

1.9 强遍历定理

1. 设有 6 个车站, 道路连接情况如图 1.19 所示。假设汽车每天可以从一个车站驶到与之直接有公路相连的相邻车站, 在夜间到达车站接受加油、清洗、检修等服务, 次日清晨各车站按相同比例将各汽车派往其相邻车站。

- (1) 试说明: 在运行了很多日子以后, 各车站每晚留宿的汽车比例趋于稳定。
- (2) 求出这些稳定值, 以便正确地设置各车站的服务规模。

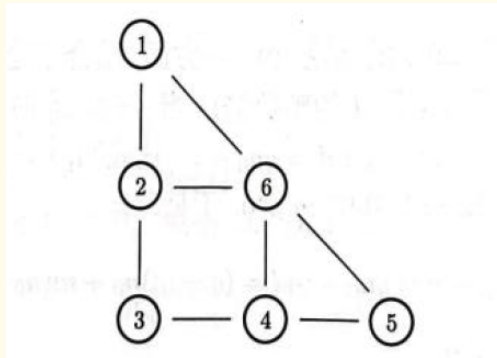


图 1.19 道路连接图

Proof. (1) 设该汽车运行系统为状态空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的马氏链。根据题意及转移矩阵 P :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

- **不可约性:** 从道路连接图可知, 任意两个车站之间都存在路径相连, 因此该马氏链是不可约的。
- **非周期性:** 观察状态 3, 存在路径 $3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (长度为 4) 和 $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (长度为 5)。由于 $\gcd(4, 5) = 1$, 状态 3 是非周期的。由不可约性可知, 整条链是非周期的。

根据有限状态不可约、非周期马氏链的收敛定理, 对于任意初始分布 μ , 均有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu P^n = \pi$$

其中 π 为马氏链唯一的不变分布。这说明运行很多天后, 各车站留宿汽车的比例趋于稳定。

(2) 对于图上的简单随机游走, 其平稳分布 π_i 与顶点的度数 d_i 成正比。各顶点的度数分别为: $d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 2, d_4 = 3, d_5 = 2, d_6 = 4$ 。总度数为 $\sum d_i = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 4 = 16$ 。由公式 $\pi_i = \frac{d_i}{\sum d_j}$ 可得:

$$\pi = \left(\frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}, \frac{4}{16} \right) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right)$$

□

2. (1) 求平面正六边形平铺图和平面正三角形平铺图上的简单随机游动的周期。
 (2) 对任意连通图, 试讨论其上的简单随机游动的周期。

Proof. (1) 特殊平铺图上的简单随机游动 (S.R.W.) 周期

- **平面正三角形平铺图:** 在该图中, 任意顶点 i 均属于某个由三个顶点组成的最小环 (三角形)。因此, 从顶点 i 出发, 经过 2 步可以回到原点 ($i \rightarrow j \rightarrow i$), 经过 3 步也可以回到原点 (沿三角形环游走)。由于 $P_{ii}^{(2)} > 0$ 且 $P_{ii}^{(3)} > 0$, 其周期为 $d(i) = \gcd(2, 3) = 1$ 。故该随机游走是非周期的。
- **平面正六边形平铺图:** 正六边形平铺图是一个典型的二部图 (Bipartite Graph)。我们可以将顶点集划分为 V_1 和 V_2 两部分, 使得每一条边的两个端点分别属于不同的集合。在二部图上, 任何回到起点的路径步数必须为偶数, 即 $P_{ii}^{(2k)} > 0$ 且 $P_{ii}^{(2k+1)} = 0$ 。因此, 其周期为 $d(i) = 2$ 。

(2) 任意连通图上简单随机游动周期的讨论

对于任意连通图 $G = (V, E)$ 上的简单随机游动, 其周期取决于图中环的性质:

• **情形 1: 图中存在奇环**

若连通图中包含至少一个奇数个顶点组成的环 (奇环), 设该奇环长度为 $2k + 1$ 。由于图连通, 任意顶点 i 均可到达该环并返回, 从而存在奇数步回到自身的路径, 即 $P_{ii}^{(2k+1+2m)} > 0$ 。同时, 沿任意边往返一次即有 $P_{ii}^{(2)} > 0$ 。因为 $\gcd(2, \text{奇数}) = 1$, 所以此时随机游走的周期为 **1** (非周期)。

• **情形 2: 图中不存在奇环 (二部图)**

一个图不存在奇环的充要条件是它是二部图。在二部图中, 顶点集 V 可分割为 V_1, V_2 , 所有边均连接 V_1 中的点和 V_2 中的点。随机游走每一步都会在 V_1 和 V_2 之间切换, 因此回到起点所需的步数必然是偶数。此时, $P_{ii}^{(2k+1)} = 0$ 且 $\gcd\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\} = 2$ 。故二部图上简单随机游走的周期为 **2**。

结论: 连通图上的简单随机游动, 若图为二部图, 则周期为 2; 否则 (即图中存在奇环), 周期为 1。 □

3. 在埃伦费斯特模型 (例 1.1.8 与例 1.8.11) 中, 设 $N = 8, X_0 = 0$, 描述 n 很大时 X_n 的分布。(注: 按照 n 的奇偶分别讨论。)

例 1.1.8 (埃伦费斯特模型) 设有 N 个不同编号的球和 A, B 两个纸箱。开始时纸箱 A 中有 X_0 个球。每次独立地以 $1/N$ 的概率选定某一个球, 把它从其所在的纸箱中拿出并放到另一个纸箱中。记 n 次操作后纸箱 A 中球的个数为 X_n , 则 $\{X_n\}$ 是状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ 上的马氏链, 转移概率为:

$$p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{N}, 0 \leq i \leq N-1; \quad p_{i,i-1} = \frac{i}{N}, 1 \leq i \leq N.$$

例 1.8.11 (埃伦费斯特模型的不变分布) 该模型的不变分布 π 为参数为 N 与 $1/2$ 的二项分布 $B(N, 1/2)$:

$$\pi_i = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^N, \quad \forall i \in S.$$

且平均回返时间满足 $E_i \sigma_i = \frac{1}{\pi_i} = \frac{2^N}{\binom{N}{i}}$ 。

Proof. 根据题意, $N = 8, X_0 = 0$ 。转移概率为 $p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{8}$ 和 $p_{i,i-1} = \frac{i}{8}$ 。

该马氏链是不可约且正常返的。其不变分布为 $\pi_k = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^8$ 。然而, 由于每一步操作必然使 A 箱中的球数增加 1 或减少 1, 因此状态的奇偶性在每一步都会发生改变。从 $X_0 = 0$ (偶数) 出发:

- 若 n 为偶数, 则 X_n 必为偶数, 即 $X_n \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
- 若 n 为奇数, 则 X_n 必为奇数, 即 $X_n \in \{1, 3, 5, 7\}$ 。

这意味着该链具有周期 2, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $P(X_n = k)$ 不直接收敛于 π_k , 而是根据 n 的奇偶性在两个不同的子分布震荡。根据周期马氏链的极限理论, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 概率质量会收敛到对应子集上“归一化”后的不变分布上。

由于二项分布系数具有对称性:

$$\sum_{j \text{ 为偶数}} \binom{8}{j} = \sum_{j \text{ 为奇数}} \binom{8}{j} = \frac{1}{2} \cdot 2^8 = 2^7$$

因此, 分两种情况讨论:

1. 当 n 为偶数且很大时: X_n 只能取偶数状态 $k \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ 。此时的极限分布为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \text{ 偶}} P(X_n = k) = \frac{\pi_k}{\sum_{j \text{ 偶}} \pi_j} = \frac{\binom{8}{k}(1/2)^8}{2^7 \cdot (1/2)^8} = \frac{\binom{8}{k}}{2^7}$$

2. 当 n 为奇数且很大时: X_n 只能取奇数状态 $k \in \{1, 3, 5, 7\}$ 。此时的极限分布为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \text{ 奇}} P(X_n = k) = \frac{\pi_k}{\sum_{j \text{ 奇}} \pi_j} = \frac{\binom{8}{k}(1/2)^8}{2^7 \cdot (1/2)^8} = \frac{\binom{8}{k}}{2^7}$$

□

4. 假设 \mathbf{P} 不可约、非周期。证明: 定理 1.9.3 的证明中定义的转移矩阵 \mathbf{R} 也是非周期的。

定理 1.9.3 (强遍历定理) 假设 \mathbf{P} 不可约、正常返、非周期, 则对任意初分布 μ , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in S} |P_\mu(X_n = j) - \pi_j| = 0$$

其中 π 为 \mathbf{P} 的不变分布。特别地, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \forall i, j \in S$ 。

Proof. 在定理 1.9.3 的证明中, 构造了复合马氏链 $Z_n = (X_n, Y_n)$, 其状态空间为 $S \times S$ 。由于 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 相互独立且转移矩阵均为 \mathbf{P} , 则 Z_n 的转移矩阵 \mathbf{R} 的元素为:

$$R_{(i,k),(j,l)} = p_{ij}p_{kl}$$

相应地, n 步转移概率为 $R_{(i,k),(j,l)}^{(n)} = p_{ij}^{(n)}p_{kl}^{(n)}$ 。

状态 i 是非周期的, 当且仅当集合 $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数为 1。由于 \mathbf{P} 不可约且非周期, 对于任意状态 $i, j \in S$, 存在足够大的 N_{ij} , 使得当 $n \geq N_{ij}$ 时, 均有 $p_{ij}^{(n)} > 0$ 。考虑复合链中的状态 (i, i) 。其 n 步自转移概率为:

$$R_{(i,i),(i,i)}^{(n)} = p_{ii}^{(n)}p_{ii}^{(n)} = (p_{ii}^{(n)})^2$$

由 \mathbf{P} 非周期性可知, 集合 $A = \{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数为 1。则存在正整数 N , 使得对一切 $n \geq N$, 均有 $p_{ii}^{(n)} > 0$ 。

此时, 对于复合链 \mathbf{R} :

- 存在 $m \geq N$, 使得 $p_{ii}^{(m)} > 0 \implies R_{(i,i),(i,i)}^{(m)} > 0$;
- 存在 $n = m + 1 \geq N$, 使得 $p_{ii}^{(n)} > 0 \implies R_{(i,i),(i,i)}^{(n)} > 0$ 。

由于 $\gcd(m, m + 1) = 1$, 且自转移步数集合的子集之公约数为 1 蕴含原集合的最大公约数为 1, 故状态 (i, i) 在 \mathbf{R} 下是非周期的。

由于 \mathbf{R} 不可约, 其中一个状态非周期蕴含全链非周期, 因此转移矩阵 \mathbf{R} 是非周期的。 □

5. 假设 \mathbf{P} 不可约、正常返, 周期 $d \geq 2$ 。若 $i \in D_r, j \in D_{r+s}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+s)} = d\pi_j$$

其中 π 为 \mathbf{P} 的不变分布。

Proof. 设 \mathbf{P} 的周期为 d 。定义新矩阵 $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^d$ 。

由于 \mathbf{P} 不可约且周期为 d , 则在 $\hat{\mathbf{P}}$ 作用下, 每一个周期类 D_r 都是一个闭集, 且限制在 D_r 上的子链 $\{Y_n\}$ (其中 $Y_n = X_{nd+r}$) 是不可约且非周期的。

由于原链 $\{X_n\}$ 正常返, 子链 $\{Y_n\}$ 在 D_r 上也必为正常返。记 $\hat{\pi}^r$ 为子链在 D_r 上的不变分布。

由强遍历定理, 对任意 $j \in D_r$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} = \hat{\pi}_j^r$$

根据不变分布的性质, 原链的不变分布 π 与子链不变分布 $\hat{\pi}^r$ 的关系为:

$$\hat{\pi}_j^r = \frac{\pi_j}{\sum_{u \in D_r} \pi_u}$$

由于马氏链在各个周期类之间是均匀循环的，每个周期类的总概率相等，即 $\sum_{u \in D_r} \pi_u = \frac{1}{d}$ 。由此得：

$$\hat{\pi}_j^r = d\pi_j \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} = d\pi_j, \quad \forall i, j \in D_r$$

现在考虑 $i \in D_r, j \in D_{r+s}$ 的情形（此处下标对 d 取模）。利用 Chapman-Kolmogorov 方程，将 $nd + s$ 步转移拆分为 nd 步和 s 步：

$$p_{ij}^{(nd+s)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(nd)} p_{kj}^{(s)}$$

由于从 $i \in D_r$ 出发经过 nd 步必回到 D_r ，故当 $k \notin D_r$ 时 $p_{ik}^{(nd)} = 0$ 。上式简化为：

$$p_{ij}^{(nd+s)} = \sum_{k \in D_r} p_{ik}^{(nd)} p_{kj}^{(s)}$$

取 $n \rightarrow \infty$ ，代入第一步得出的子链极限结果：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+s)} = \sum_{k \in D_r} (d\pi_k) p_{kj}^{(s)} = d \sum_{k \in D_r} \pi_k p_{kj}^{(s)}$$

由于 π 是 \mathbf{P} 的不变分布，满足 $\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}^{(s)}$ 。

注意到当 $k \notin D_r$ 时，从 k 出发经过 s 步不可能到达 $j \in D_{r+s}$ （因为步数不匹配），故对于 $k \notin D_r$ ，有 $p_{kj}^{(s)} = 0$ 。因此，求和区间可以从 D_r 扩展到全空间 S ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+s)} = d \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}^{(s)} = d\pi_j$$

□

6. 证明： (1.9.1) 式成立。即验证：

$$r_{(i,j)(k,l)}^{(n)} = p_{ik}^{(n)} p_{jl}^{(n)}, \quad \forall (i,j), (k,l) \in \tilde{S}.$$

Proof. 在耦合方法的构造中，复合马氏链 $\{Z_n\} = \{(X_n, Y_n)\}$ 的状态空间为 $\tilde{S} = S \times S$ 。由定义，其单步转移概率为：

$$r_{(i,j)(k,l)} = P(X_1 = k, Y_1 = l \mid X_0 = i, Y_0 = j)$$

由于 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 是两个相互独立的马氏链，且转移矩阵均为 \mathbf{P} ，故：

$$r_{(i,j)(k,l)} = P(X_1 = k \mid X_0 = i) P(Y_1 = l \mid Y_0 = j) = p_{ik} p_{jl}$$

下面对 n 步转移概率 $r_{(i,j)(k,l)}^{(n)}$ 采用数学归纳法或直接利用 Chapman-Kolmogorov 方程展开进行证明：利用复合链的 n 步转移路径求和：

$$\begin{aligned} r_{(i,j)(k,l)}^{(n)} &= \sum_{(i_1, j_1) \in \tilde{S}} \cdots \sum_{(i_{n-1}, j_{n-1}) \in \tilde{S}} r_{(i,j)(i_1, j_1)} r_{(i_1, j_1)(i_2, j_2)} \cdots r_{(i_{n-1}, j_{n-1})(k,l)} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S} \sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in S} (p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} k}) \cdot (p_{j j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} l}) \end{aligned}$$

由于求和项可以根据变量 i_m 和 j_m 进行重组（算子分解）：

$$\begin{aligned} r_{(i,j)(k,l)}^{(n)} &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S} p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} k} \right) \cdot \left(\sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in S} p_{j j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} l} \right) \\ &= p_{ik}^{(n)} \cdot p_{jl}^{(n)} \end{aligned}$$

□

注：矩阵克罗内克积（Kronecker Product）视角：

若令复合链的转移矩阵为 \mathbf{R} ，由定义可知 $\mathbf{R} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$ 。利用克罗内克积的性质 $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^n = \mathbf{A}^n \otimes \mathbf{B}^n$ ，有：

$$\mathbf{R}^n = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P})^n = \mathbf{P}^n \otimes \mathbf{P}^n$$

对应到元素即为:

$$r_{(i,j)(k,l)}^{(n)} = p_{ik}^{(n)} p_{jl}^{(n)}$$

7*. 证明: 定理 1.9.3 的证明中定义的 $\{W_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 都是 S 上以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链。

Proof. 根据定理 1.9.3 证明中的定义, $\{Z_n\} = \{(W_n, Y_n)\}$ 是状态空间 $\tilde{S} = S \times S$ 上的马氏链, 初分布为 ν , 转移矩阵为 \mathbf{R} , 且满足:

$$r_{(i,j)(k,l)} = p_{ik} p_{jl}, \quad \forall (i,j), (k,l) \in \tilde{S}$$

1. 证明 $\{W_n\}$ 是以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链

我们要证明 $\{W_n\}$ 满足马尔可夫性, 且其单步转移概率由 \mathbf{P} 给出。考虑 $\{W_n\}$ 的任意一条长为 n 的轨道 $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ 。其联合概率可以通过对 $\{Y_n\}$ 的所有可能轨道 $j_0, j_1, \dots, j_n \in S$ 求和 (全概率公式) 得到:

$$\begin{aligned} P(W_0 = i_0, W_1 = i_1, \dots, W_n = i_n) &= \sum_{j_0, j_1, \dots, j_n \in S} P(Z_0 = (i_0, j_0), Z_1 = (i_1, j_1), \dots, Z_n = (i_n, j_n)) \\ &= \sum_{j_0, \dots, j_n} \nu_{(i_0, j_0)} r_{(i_0, j_0)(i_1, j_1)} \cdots r_{(i_{n-1}, j_{n-1})(i_n, j_n)} \end{aligned}$$

将 r 的定义代入, 并分离关于 i 和 j 的项:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j_0, \dots, j_n} \nu_{(i_0, j_0)} (p_{i_0 i_1} p_{j_0 j_1}) \cdots (p_{i_{n-1} i_n} p_{j_{n-1} j_n}) \\ &= (p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}) \sum_{j_0 \in S} \nu_{(i_0, j_0)} \sum_{j_1 \in S} p_{j_0 j_1} \cdots \sum_{j_{n-1} \in S} p_{j_{n-2} j_{n-1}} \left(\sum_{j_n \in S} p_{j_{n-1} j_n} \right) \end{aligned}$$

由于 \mathbf{P} 是转移矩阵, 满足行和为 1, 即 $\sum_{y \in S} p_{xy} = 1$ 。从右向左逐层求和, 所有关于 j 的连乘求和项都会塌缩为 1:

$$\sum_{j_n \in S} p_{j_{n-1} j_n} = 1 \implies \sum_{j_{n-1} \in S} p_{j_{n-2} j_{n-1}} \cdot 1 = 1 \implies \cdots \implies \sum_{j_1 \dots j_n} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n} = 1$$

令 $\mu_{i_0} = \sum_{j_0 \in S} \nu_{(i_0, j_0)}$, 这是 $\{W_n\}$ 的边缘初分布。则联合概率简化为:

$$P(W_0 = i_0, W_1 = i_1, \dots, W_n = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \quad (*)$$

接下来验证马尔可夫性。对于任意 $P(W_0 = i_0, \dots, W_{n-1} = i_{n-1}) > 0$, 有:

$$\begin{aligned} P(W_n = i_n | W_0 = i_0, \dots, W_{n-1} = i_{n-1}) &= \frac{P(W_0 = i_0, \dots, W_n = i_n)}{P(W_0 = i_0, \dots, W_{n-1} = i_{n-1})} \\ &= \frac{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} i_n}}{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}}} \\ &= p_{i_{n-1} i_n} \end{aligned}$$

这表明 $\{W_n\}$ 的未来状态仅依赖于当前状态, 且转移概率矩阵正是 \mathbf{P} 。因此 $\{W_n\}$ 是 S 上以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链。

2. 证明 $\{Y_n\}$ 是以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链

同理, 考虑 $\{Y_n\}$ 的联合分布, 将 $\{W_n\}$ 的所有可能轨道 i_0, \dots, i_n 边缘化:

$$\begin{aligned} P(Y_0 = j_0, \dots, Y_n = j_n) &= \sum_{i_0, \dots, i_n} \nu_{(i_0, j_0)} (p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}) (p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n}) \\ &= (p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n}) \sum_{i_0 \in S} \nu_{(i_0, j_0)} \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \right) \end{aligned}$$

利用转移矩阵行和为 1 的性质, 括号内的求和同样为 1。令 $\eta_{j_0} = \sum_{i_0 \in S} \nu_{(i_0, j_0)}$, 得:

$$P(Y_0 = j_0, \dots, Y_n = j_n) = \eta_{j_0} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n}$$

以此计算条件概率同样可得 $P(Y_n = j_n | Y_{n-1} = j_{n-1}) = p_{j_{n-1} j_n}$ 。故 $\{Y_n\}$ 也是 S 上以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链。 \square

1.10 收敛速度

1. 证明: d_{TV} 是 \mathcal{M} 上的距离, 即满足以下三条性质:

- (i) 非负性: $d_{TV}(\mu, \nu) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\mu = \nu$;
- (ii) 对称性: $d_{TV}(\mu, \nu) = d_{TV}(\nu, \mu)$;
- (iii) 三角不等式: $d_{TV}(\mu, \nu) \leq d_{TV}(\mu, \pi) + d_{TV}(\pi, \nu)$ 。

Proof. 根据全变差距离的定义, 对于概率测度空间 \mathcal{M} 上的任意两个分布 μ, ν , 有:

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i|$$

下面逐一验证距离的三条性质:

(i) **非负性:** 由于对任意 $i \in S$, 绝对值 $|\mu_i - \nu_i| \geq 0$, 因此显然有:

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i| \geq 0$$

且取等号的充要条件为求和式中每一项均为 0, 即:

$$d_{TV}(\mu, \nu) = 0 \iff \forall i \in S, |\mu_i - \nu_i| = 0 \iff \forall i \in S, \mu_i = \nu_i \iff \mu = \nu$$

(ii) **对称性:** 利用实数绝对值的对称性 $|\mu_i - \nu_i| = |\nu_i - \mu_i|$, 直接可得:

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i| = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\nu_i - \mu_i| = d_{TV}(\nu, \mu)$$

(iii) **三角不等式:** 对于 \mathcal{M} 上的任意三个分布 μ, ν, π , 利用实数绝对值的三角不等式 $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$ 可知, 对任意 $i \in S$ 有:

$$|\mu_i - \nu_i| \leq |\mu_i - \pi_i| + |\pi_i - \nu_i|$$

对所有状态 $i \in S$ 求和, 并两边同乘 $\frac{1}{2}$ 得:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in S} (|\mu_i - \pi_i| + |\pi_i - \nu_i|)$$

将右侧的求和项拆分, 即得:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \pi_i| + \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\pi_i - \nu_i|$$

根据定义, 上式等价于:

$$d_{TV}(\mu, \nu) \leq d_{TV}(\mu, \pi) + d_{TV}(\pi, \nu)$$

综上所述, d_{TV} 满足非负性、对称性和三角不等式, 故其为 \mathcal{M} 上的距离。 \square

2. 证明下列对偶表达式成立, 并给出达到极值的子集 A 和函数 f :

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \sup_{A \subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)| = \sup_{0 \leq f_i \leq 1, i \in S} \left| \sum_{i \in S} \mu_i f_i - \sum_{i \in S} \nu_i f_i \right|.$$

Proof. 根据全变差距离的定义:

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i|$$

由于 μ 和 ν 都是概率分布, 满足 $\sum_{i \in S} \mu_i = \sum_{i \in S} \nu_i = 1$, 因此有 $\sum_{i \in S} (\mu_i - \nu_i) = 0$ 。将状态空间 S 划分为大于 0 和小于等于 0 的两部分, 即:

$$\sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i) + \sum_{i: \mu_i \leq \nu_i} (\mu_i - \nu_i) = 0 \implies \sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i) = \sum_{i: \mu_i \leq \nu_i} (\nu_i - \mu_i)$$

代入全变差距离的定义式中，可得：

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i) + \sum_{i: \mu_i \leq \nu_i} (\nu_i - \mu_i) \right] = \sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i)$$

这也可以写为 $\max \left\{ \sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i), \sum_{i: \mu_i < \nu_i} (\nu_i - \mu_i) \right\}$ 。

1. 证明 $d_{TV}(\mu, \nu) = \sup_{A \subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)|$

对于任意子集 $A \subseteq S$ ，有：

$$\mu(A) - \nu(A) = \sum_{i \in A} (\mu_i - \nu_i) \leq \sum_{i \in A, \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i) \leq \sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i) = d_{TV}(\mu, \nu)$$

同理， $\nu(A) - \mu(A) \leq d_{TV}(\mu, \nu)$ 。因此对任意 A ，恒有 $|\mu(A) - \nu(A)| \leq d_{TV}(\mu, \nu)$ 。要使上式取到最大值（上确界），我们只需将所有使 $\mu_i - \nu_i > 0$ 的元素放入集合中。故达到极值的子集为：

$$A^* = \{i \in S : \mu_i > \nu_i\}$$

此时 $|\mu(A^*) - \nu(A^*)| = \sum_{i \in A^*} (\mu_i - \nu_i) = d_{TV}(\mu, \nu)$ ，第一个等式得证。

2. 证明 $\sup_{A \subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)| = \sup_{0 \leq f_i \leq 1} \left| \sum_{i \in S} (\mu_i - \nu_i) f_i \right|$

考虑子集 A 的示性函数 $1_A(i)$ ，当 $i \in A$ 时取 1，当 $i \notin A$ 时取 0。显然 $0 \leq 1_A(i) \leq 1$ 。由于示性函数构成的集合是所有满足 $0 \leq f_i \leq 1$ 的函数集合的子集，故必然有：

$$\sup_{A \subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)| = \sup_{A \subseteq S} \left| \sum_{i \in S} (\mu_i - \nu_i) 1_A(i) \right| \leq \sup_{0 \leq f_i \leq 1} \left| \sum_{i \in S} (\mu_i - \nu_i) f_i \right|$$

反之，对于任意满足 $0 \leq f_i \leq 1$ 的函数 f ，我们试图放缩使其最大化：

$$\sum_{i \in S} (\mu_i - \nu_i) f_i \leq \sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i) f_i \leq \sum_{i: \mu_i > \nu_i} (\mu_i - \nu_i) \cdot 1 = d_{TV}(\mu, \nu)$$

同理也可证明其下界，从而 $\left| \sum_{i \in S} (\mu_i - \nu_i) f_i \right| \leq d_{TV}(\mu, \nu)$ 。要使该式达到最大值 $d_{TV}(\mu, \nu)$ ，只需让正项乘积最大（取 1），负项乘积最小（取 0）。故达到极值的函数为：

$$f_i^* = \begin{cases} 1, & \mu_i > \nu_i \\ 0, & \mu_i \leq \nu_i \end{cases}$$

此时 f_i^* 恰好等于集合 A^* 的示性函数 $1_{A^*}(i)$ 。由此可知两个上确界不仅相等，而且都在相同的条件下达到最大值。 \square

3. 证明不等式 (1.10.1) 成立，即：

$$d_{TV}(\mu \mathbf{P}, \nu \mathbf{P}) \leq d_{TV}(\mu, \nu).$$

Proof. 根据全变差距离的定义，分布 $\mu \mathbf{P}$ 与 $\nu \mathbf{P}$ 之间的全变差距离为：

$$d_{TV}(\mu \mathbf{P}, \nu \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in S} |(\mu \mathbf{P})_j - (\nu \mathbf{P})_j|$$

将矩阵乘法展开，即 $(\mu \mathbf{P})_j = \sum_{i \in S} \mu_i p_{ij}$ ，代入得：

$$d_{TV}(\mu \mathbf{P}, \nu \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \left| \sum_{i \in S} \mu_i p_{ij} - \sum_{i \in S} \nu_i p_{ij} \right| = \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \left| \sum_{i \in S} (\mu_i - \nu_i) p_{ij} \right|$$

利用绝对值的三角不等式 $|\sum x_i| \leq \sum |x_i|$ ，由于转移概率 $p_{ij} \geq 0$ ，可以将绝对值放缩到求和号内部：

$$d_{TV}(\mu \mathbf{P}, \nu \mathbf{P}) \leq \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i| p_{ij}$$

因为各项均非负，根据 Fubini 定理（或有限求和的交换律），我们可以交换对 i 和 j 的求和顺序：

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i| p_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \left(|\mu_i - \nu_i| \sum_{j \in S} p_{ij} \right)$$

由于 \mathbf{P} 是一个随机矩阵（转移矩阵），其每一行的概率之和必然为 1，即对任意状态 $i \in S$ ，有 $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ 。代入上式，求和项化简为：

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i| \cdot 1 = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu_i - \nu_i|$$

根据定义，这正是 μ 与 ν 之间的全变差距离 $d_{TV}(\mu, \nu)$ 。综上所述，我们得到：

$$d_{TV}(\mu\mathbf{P}, \nu\mathbf{P}) \leq d_{TV}(\mu, \nu)$$

不等式得证。 □

4. 假设存在 $\mu \in \mathcal{M}$ ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu\mathbf{P}^n, \pi) = 0$ 。证明： π 是不变分布。

Proof. 根据上一题中证明的全变差距离在马氏链转移下的非增性（收缩性）性质，对于 \mathcal{M} 上的任意两个分布 ν_1, ν_2 ，恒有：

$$d_{TV}(\nu_1\mathbf{P}, \nu_2\mathbf{P}) \leq d_{TV}(\nu_1, \nu_2)$$

令 $\nu_1 = \mu\mathbf{P}^n$ ， $\nu_2 = \pi$ ，代入上述不等式可得：

$$d_{TV}(\mu\mathbf{P}^{n+1}, \pi\mathbf{P}) \leq d_{TV}(\mu\mathbf{P}^n, \pi)$$

已知条件表明当 $n \rightarrow \infty$ 时，序列 $\mu\mathbf{P}^n$ 收敛于 π ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu\mathbf{P}^n, \pi) = 0$ 。对不等式两边取 $n \rightarrow \infty$ 的极限，并利用全变差距离的非负性，有夹逼关系：

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu\mathbf{P}^{n+1}, \pi\mathbf{P}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu\mathbf{P}^n, \pi) = 0$$

由夹逼定理得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu\mathbf{P}^{n+1}, \pi\mathbf{P}) = 0 \quad (*)$$

由三角不等式：

$$d_{TV}(\pi, \pi\mathbf{P}) \leq d_{TV}(\pi, \mu\mathbf{P}^{n+1}) + d_{TV}(\mu\mathbf{P}^{n+1}, \pi\mathbf{P})$$

令 $n \rightarrow \infty$ 取极限：

- 对于第一项：由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu\mathbf{P}^n, \pi) = 0$ ，这同样意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\pi, \mu\mathbf{P}^{n+1}) = 0$ ；
- 对于第二项：由 (*) 式可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu\mathbf{P}^{n+1}, \pi\mathbf{P}) = 0$ 。

因此，不等式右侧的极限为 $0 + 0 = 0$ ，这导出：

$$d_{TV}(\pi, \pi\mathbf{P}) \leq 0$$

又因距离函数满足非负性 $d_{TV}(\pi, \pi\mathbf{P}) \geq 0$ ，故必须有：

$$d_{TV}(\pi, \pi\mathbf{P}) = 0$$

根据距离度量的正定性（取等号当且仅当两元相等），可得结论：

$$\pi = \pi\mathbf{P}$$

故 π 是该马尔可夫链的不变分布。 □

1.11 分支过程

1. 证明：分支过程中，除状态 0 以外的其他状态都是暂态。

Proof. 设分支过程为 $\{X_n : n \geq 0\}$ ，其中个体的后代数量服从分布 $P(\xi = k) = p_k$ ($k \geq 0$)。假设该分支过程是非平凡的，即 $p_1 \neq 1$ （若 $p_1 = 1$ ，则每个个体永远只生一个后代，种群数量保持常数，所有状态均为吸收态，不符合实际研究意义）。

由于状态 0 是吸收态 ($p_{00} = 1$)，一旦种群灭绝将永远保持灭绝，故状态 0 是常返态。对于任意状态 $i \geq 1$ ，定义首回转时间 $\sigma_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ 。我们分两种情况证明 $P_i(\sigma_i < \infty) < 1$ ：

情形 1：当 $p_0 > 0$ 时

从状态 i 出发, 经过一步直接到达状态 0 (即种群在一代内全部灭绝) 的概率为:

$$P(X_1 = 0 | X_0 = i) = (p_0)^i > 0$$

利用全概率公式对第一步进行条件展开:

$$P_i(\sigma_i < \infty) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\sigma_i < \infty | X_1 = j)P(X_1 = j | X_0 = i)$$

因为状态 0 是吸收态, 一旦进入状态 0 就永远无法回到状态 i , 所以 $P(\sigma_i < \infty | X_1 = 0) = 0$ 。于是上式变为:

$$\begin{aligned} P_i(\sigma_i < \infty) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(\sigma_i < \infty | X_1 = j)P(X_1 = j | X_0 = i) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot P(X_1 = j | X_0 = i) \\ &= 1 - P(X_1 = 0 | X_0 = i) \\ &= 1 - (p_0)^i \end{aligned}$$

由于 $p_0 > 0$ 且 $i \geq 1$, 必有 $(p_0)^i > 0$ 。因此:

$$P_i(\sigma_i < \infty) \leq 1 - (p_0)^i < 1$$

这证明了当 $p_0 > 0$ 时, 状态 i 为暂态。

情形 2: 当 $p_0 = 0$ 时

此时, 每个个体至少产生一个后代, 即 $P(\xi \geq 1) = 1$, 种群数量序列 $\{X_n\}$ 是一个非降序列, 对于所有 $n \geq 0$, 有 $X_{n+1} \geq X_n$ 恒成立。如果在第一步有 $X_1 > i$, 那么对于所有后续的 $n \geq 1$, 都有 $X_n \geq X_1 > i$, 过程将永远无法回到状态 i 。因此, 要使过程能够回到状态 i , 唯一的方式是它在第一步就保持在 i (实际上之后也必须永远保持在 i):

$$P_i(\sigma_i < \infty) = P(X_1 = i | X_0 = i) = p_{ii}$$

要使 i 个个体产生恰好 i 个后代, 且每个个体至少产生 1 个后代, 唯一的情况是每个个体都恰好产生 1 个后代。因此:

$$p_{ii} = (p_1)^i$$

由于假设过程非平凡 ($p_1 < 1$), 则 $(p_1)^i < 1$ 。因此:

$$P_i(\sigma_i < \infty) = (p_1)^i < 1$$

这证明了当 $p_0 = 0$ 时, 状态 i 同样为暂态。

综上所述, 除状态 0 以外, 所有状态 $i \geq 1$ 都满足首回转概率严格小于 1, 因此都是暂态。 \square

2. 假设子代分布为 $B(2, p)$ 。

- (1) 求灭绝概率 $\rho = P_1(\tau_0 < \infty)$ 。
- (2) 求 $P_1(\tau_0 = 3)$ 。
- (3) 假设 X_0 服从参数为 λ 的泊松分布, 试求 $P(\tau_0 < \infty)$ 。

Proof. 设分支过程的后代分布 $\xi \sim B(2, p)$, 即每个个体产生 k 个后代的概率为:

$$p_k = P(\xi = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}, \quad k = 0, 1, 2$$

具体地, $p_0 = (1-p)^2$, $p_1 = 2p(1-p)$, $p_2 = p^2$ 。

其概率母函数 (PGF) 为:

$$f(s) = E[s^\xi] = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 = (1-p)^2 + 2p(1-p)s + p^2 s^2 = ((1-p) + ps)^2$$

每个个体的平均后代数为 $\mu = E[\xi] = 2p$ 。

(1) 根据分支过程理论, 从 1 个个体出发的最终灭绝概率 ρ 是方程 $s = f(s)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小非负实根。令 $s = ((1-p) + ps)^2$, 展开并整理得:

$$p^2 s^2 + (2p - 2p^2 - 1)s + (1-p)^2 = 0$$

显然 $s = 1$ 是该方程的一个根 (因为 $f(1) = 1$)。利用韦达定理, 两根之积为 $\frac{(1-p)^2}{p^2}$, 故另一个根为:

$$s^* = \frac{(1-p)^2}{p^2} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

灭绝概率 ρ 取决于均值 $\mu = 2p$:

- 若 $\mu \leq 1$ (即 $0 < p \leq \frac{1}{2}$), 此时 $s^* \geq 1$, 方程在 $[0, 1]$ 内的最小非负根为 1, 故 $\rho = 1$ 。
- 若 $\mu > 1$ (即 $\frac{1}{2} < p \leq 1$), 此时 $s^* < 1$, 方程在 $[0, 1]$ 内有两个根, 最小非负根为 s^* 。

综上所述, 灭绝概率为:

$$\rho = \begin{cases} 1, & 0 < p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^2, & \frac{1}{2} < p \leq 1 \end{cases}$$

(2) 事件 $\{\tau_0 = 3\}$ 表示分支过程恰好在第 3 代灭绝, 即第 3 代无个体 ($X_3 = 0$), 但第 2 代有个体 ($X_2 > 0$)。因此:

$$P_1(\tau_0 = 3) = P_1(X_3 = 0) - P_1(X_2 = 0)$$

由母函数性质可知, $P_1(X_n = 0) = f_n(0)$, 其中 $f_n(s)$ 为 $f(s)$ 的 n 次迭代, 且 $f_n(0) = f(f_{n-1}(0))$ 。

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f(0) = (1-p)^2 \\ f_2(0) &= f(f_1(0)) = ((1-p) + p(1-p)^2)^2 = (1-p)^2(1+p-p^2)^2 \\ f_3(0) &= f(f_2(0)) = ((1-p) + pf_2(0))^2 = (1-p + p(1-p)^2(1+p-p^2))^2 \end{aligned}$$

因此, 恰好在第 3 代灭绝的概率为:

$$\begin{aligned} P_1(\tau_0 = 3) &= (1-p + p(1-p)^2(1+p-p^2))^2 - (1-p)^2(1+p-p^2)^2 \\ &= p^2(1-p)^4(-p^2+p+2)(-p^6+3p^5-p^4-3p^3+2p+2) \end{aligned}$$

(3) 由于各个初始个体的繁衍过程相互独立, 初始有 k 个个体时, 过程最终灭绝当且仅当这 k 个个体各自繁衍出的子系全部灭绝。其概率为:

$$P(\tau_0 < \infty | X_0 = k) = \rho^k$$

利用全概率公式, 对 X_0 取期望 (即求 X_0 的母函数 $G_{X_0}(s)$ 在 $s = \rho$ 处的值):

$$\begin{aligned} P(\tau_0 < \infty) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau_0 < \infty | X_0 = k)P(X_0 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\rho)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda\rho} = e^{-\lambda(1-\rho)} \end{aligned}$$

代入第 (1) 问中求得的 ρ 值, 得到最终结论:

- 当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, $\rho = 1$, 此时 $P(\tau_0 < \infty) = e^{-\lambda(1-1)} = 1$ 。
- 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\rho = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$, 此时:

$$P(\tau_0 < \infty) = \exp \left\{ -\lambda \left[1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 \right] \right\} = \exp \left\{ \frac{-\lambda(2p-1)}{p^2} \right\}$$

□

3. 假设平均子代数 $m = E\xi < 1$ 。证明: $E_1\tau_0 < \infty$ 。

Proof. 对于取非负整数值的随机变量 (停时) τ_0 , 其期望可以通过尾概率求和来表示:

$$E_1\tau_0 = \sum_{n=0}^{\infty} P_1(\tau_0 > n)$$

事件 $\{\tau_0 > n\}$ 的物理意义是: 分支过程在第 n 代时仍未灭绝。这等价于第 n 代的个体数至少为 1, 即 $\{X_n \geq 1\}$ 。因此:

$$E_1\tau_0 = \sum_{n=0}^{\infty} P_1(X_n \geq 1)$$

由于 X_n 是非负随机变量, 我们可以对其应用 Markov 不等式 $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$ 。取 $a = 1$, 可得对任意 $n \geq 0$:

$$P_1(X_n \geq 1) \leq \frac{E_1[X_n]}{1} = E_1[X_n]$$

将该不等式代入前面的期望求和式中, 得到放缩:

$$E_1\tau_0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} E_1[X_n]$$

根据分支过程的基本性质, 从单一个体出发 ($X_0 = 1$), 第 n 代的期望个体数为单代平均子代数 m 的 n 次方, 即 $E_1[X_n] = m^n$ 。代入上式得:

$$E_1\tau_0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^n$$

由于已知条件 $m = E\xi < 1$, 上述无穷级数是一个公比严格小于 1 的几何级数, 必定收敛。利用等比数列求和公式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^n = \frac{1}{1-m}$$

因为 $m < 1$, 所以 $\frac{1}{1-m}$ 是一个有限的正实数。从而:

$$E_1\tau_0 \leq \frac{1}{1-m} < \infty$$

即平均灭绝时间有限。 □

4. 设分支过程 $\{X_n\}$ 的子代分布的均值为 μ , 方差为 σ^2 。试证:

$$EX_{n+1}^2 = \mu^n \sigma^2 + \mu^2 EX_n^2.$$

Proof. 根据分支过程的定义, 第 $n+1$ 代的个体数 X_{n+1} 是由第 n 代的 X_n 个个体分别产生的子代数之和构成的, 即:

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n,i}$$

其中 $\xi_{n,i}$ 表示第 n 代第 i 个个体产生的子代数。根据模型假设, 随机变量序列 $\{\xi_{n,i}\}$ 相互独立且同分布, 与 X_n 独立, 且共同满足均值 $E[\xi_{n,i}] = \mu$, 方差 $\text{Var}(\xi_{n,i}) = \sigma^2$ 。

我们在给定 X_n 的条件下, 求 X_{n+1} 的条件期望和条件方差。因为给定 X_n 时, X_{n+1} 相当于 X_n 个独立同分布的随机变量之和, 所以有:

$$E[X_{n+1} | X_n] = X_n E[\xi_{n,i}] = X_n \mu$$

$$\text{Var}(X_{n+1} | X_n) = X_n \text{Var}(\xi_{n,i}) = X_n \sigma^2$$

接下来, 利用随机变量的方差与二阶矩的关系 $E[Y^2] = \text{Var}(Y) + (E[Y])^2$, 计算给定 X_n 时 X_{n+1} 的条件二阶矩:

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}^2 | X_n] &= \text{Var}(X_{n+1} | X_n) + (E[X_{n+1} | X_n])^2 \\ &= X_n \sigma^2 + (X_n \mu)^2 \\ &= X_n \sigma^2 + X_n^2 \mu^2 \end{aligned}$$

现在,对上式两端同时取无条件期望。利用全期望公式(重期望性质, Tower Property) $E[X_{n+1}^2] = E[E[X_{n+1}^2 | X_n]]$, 得到:

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}^2] &= E[X_n\sigma^2 + X_n^2\mu^2] \\ &= \sigma^2 E[X_n] + \mu^2 E[X_n^2] \end{aligned}$$

对于标准的分支过程(假设初始种群包含一个祖先, 即 $X_0 = 1$), 第 n 代的期望个体数满足 $E[X_n] = E[\xi]^n = \mu^n$ 。将此结论代入上式, 即得:

$$EX_{n+1}^2 = \mu^n\sigma^2 + \mu^2 EX_n^2$$

□

5. 假设子代分布为 $p_1 = p_2 = q/2, p_0 = 1 - q$ 。

(1) 试问: q 取何值时灭绝概率 $\rho = 1$?

(2) 假设 $q = 0.9$, 初值 $X_0 = 4$ 。试求存活概率 $P_4(\tau_0 = \infty)$ 。

Proof. 已知分支过程的子代分布为 $P(\xi = 1) = p_1 = \frac{q}{2}, P(\xi = 2) = p_2 = \frac{q}{2}, P(\xi = 0) = p_0 = 1 - q$ 。其中 q 显然应满足 $0 \leq q \leq 1$ 。

单代个体的平均子代数(期望)为:

$$m = E[\xi] = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 0 + \frac{q}{2} + 2 \left(\frac{q}{2}\right) = \frac{3q}{2}$$

(1) 根据分支过程的临界定理, 若 $p_0 > 0$, 则分支过程最终必然灭绝(即 $\rho = 1$)的充要条件是平均子代数 $m \leq 1$ 。将均值 $m = \frac{3q}{2}$ 代入该条件:

$$\frac{3q}{2} \leq 1 \implies q \leq \frac{2}{3}$$

又因为概率参数 $q \geq 0$, 故当 $q \in [0, \frac{2}{3}]$ 时, 该分支过程的灭绝概率 $\rho = 1$ 。

(2) 当 $q = 0.9$ 时, 子代分布的各项概率为:

$$p_1 = 0.45, \quad p_2 = 0.45, \quad p_0 = 1 - 0.9 = 0.1$$

此时平均子代数 $m = \frac{3 \times 0.9}{2} = 1.35 > 1$ 。因此, 单祖先的灭绝概率 $\rho < 1$ 。为了求出 ρ , 我们需要解概率母函数方程 $s = f(s)$, 其中:

$$f(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 = 0.1 + 0.45s + 0.45s^2$$

令 $f(s) = s$, 得到:

$$0.45s^2 - 0.55s + 0.1 = 0$$

两边同时乘以 20 以化简系数:

$$9s^2 - 11s + 2 = 0$$

因式分解得:

$$(9s - 2)(s - 1) = 0$$

方程在 $[0, 1]$ 上的根为 $s = 1$ 和 $s = \frac{2}{9}$ 。由于 $m > 1$, 灭绝概率 ρ 是最小非负实根, 因此:

$$\rho = P_1(\tau_0 < \infty) = \frac{2}{9}$$

由于初始状态有 $X_0 = 4$ 个个体, 且各个体的繁衍过程相互独立, 整个种群灭绝当且仅当这 4 个祖先各自的子系全部灭绝。因此, 从 $X_0 = 4$ 出发的灭绝概率为:

$$P_4(\tau_0 < \infty) = \rho^4 = \left(\frac{2}{9}\right)^4 = \frac{16}{6561}$$

所以, 种群最终存活(不灭绝)的概率为:

$$P_4(\tau_0 = \infty) = 1 - P_4(\tau_0 < \infty) = 1 - \frac{16}{6561} = \frac{6545}{6561}$$

□

6. 假设某物种的每个成年个体独立地生出若干幼年个体，幼年个体数目服从参数为 λ 的泊松分布，且每个幼年个体独立地以概率 p 活到成年。

- (1) 将第 n 代中成年的个体数记为 $Y_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ，并假设 $Y_0 = 1$ ，则 $\{Y_n\}$ 是分支过程。试求 $\{Y_n\}$ 的子代分布以及 $\{Y_n\}$ 为超临界的充要条件。
- (2) 将第 n 代中幼年的个体数记为 $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ，并假设 $Z_0 = 1$ ，则 $\{Z_n\}$ 是分支过程。试求 $\{Z_n\}$ 的子代分布以及 $\{Z_n\}$ 为超临界的充要条件。（注：以上充要条件均用 λ, p 的多项式来表示。）

Proof. (1) 设单个成年个体产生的下一代成年个体数为 ξ_Y 。一个成年个体首先会生出 N 个幼年个体，其中 $N \sim P(\lambda)$ 。这 N 个幼年个体中，每个个体都有 p 的概率存活到成年。

根据泊松分布的稀疏性质，对参数为 λ 的泊松分布以概率 p 进行独立随机抽样（保留），其结果依然服从泊松分布，且参数变为 λp 。因此， $\{Y_n\}$ 的子代分布为：

$$\xi_Y \sim P(\lambda p)$$

即

$$P(\xi_Y = k) = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

由于 ξ_Y 服从泊松分布，其均值为：

$$m_Y = E[\xi_Y] = \lambda p$$

根据分支过程的临界定理，过程为超临界（即灭绝概率严格小于 1）的充要条件是均值严格大于 1。

故 $\{Y_n\}$ 为超临界的充要条件为：

$$\lambda p > 1$$

(2) 设单个幼年个体产生的下一代幼年个体数为 ξ_Z 。对于一个幼年个体，其生命周期分为两种互斥的情况：

- 以概率 $1 - p$ 夭折（未活到成年），此时产生幼年个体的数量为 0。
- 以概率 p 活到成年，此时产生幼年个体的数量服从 $P(\lambda)$ 。

利用全概率公式，我们可以写出 $\{Z_n\}$ 的子代分布 $P(\xi_Z = k)$ ：当 $k = 0$ 时（未产生后代，可能是夭折了，也可能是活到成年但生了 0 个）：

$$P(\xi_Z = 0) = (1 - p) + p \cdot P(N = 0) = 1 - p + p e^{-\lambda}$$

当 $k \geq 1$ 时（必然是活到了成年，且生了 k 个）：

$$P(\xi_Z = k) = p \cdot P(N = k) = p \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

接下来计算其子代分布的均值 $m_Z = E[\xi_Z]$ ：

$$\begin{aligned} E[\xi_Z] &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(\xi_Z = k) \\ &= 0 \cdot P(\xi_Z = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} k \left(p \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right) \\ &= p \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

令 $j = k - 1$ ，则后方的级数恰好是参数为 λ 的泊松分布所有概率之和，等于 1：

$$E[\xi_Z] = p \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} = p \lambda \cdot 1 = p \lambda$$

同理，分支过程 $\{Z_n\}$ 为超临界的充要条件也是均值严格大于 1。

故 $\{Z_n\}$ 为超临界的充要条件同样为：

$$\lambda p > 1$$

□

7*. 假设 $\xi_{n,r}, Y_n, n \geq 0, r \geq 1$ 相互独立, 取值非负整数; 分布列为 $P(\xi_{n,r} = k) = p_k, P(Y_n = k) = h_k, n, r, k \geq 0, r \geq 1$. 令 $X_0 = 0$, 并递归定义

$$X_{n+1} = \sum_{r=1}^{X_n} \xi_{n,r} + Y_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

称 $\{X_n\}$ 为带移民的分支过程。其中, 每个个体以概率 p_k 产生 k 个后代, 每一代以概率 h_k 进来 k 个新移民。进一步假设 $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k < 1, \sum_{k=0}^{\infty} k h_k < \infty$ 。

(1) 证明: $\{X_n\}$ 具有不变分布 π 。

(2) 记 $\pi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k s^k, \phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$ 。证明:

$$\pi(\phi(s))h(s) = \pi(s).$$

Proof. 记 X_n 的概率母函数 (PGF) 为 $G_n(s) = E[s^{X_n}]$, 其中 $s \in [0, 1]$ 。由定义, 后代分布的母函数为 $\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, 移民分布的母函数为 $h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$ 。已知 $\mu = \phi'(1) = \sum k p_k < 1, \lambda = h'(1) = \sum k h_k < \infty$ 。

(1) 首先, 利用全期望公式计算 X_{n+1} 的母函数 $G_{n+1}(s)$:

$$G_{n+1}(s) = E[s^{X_{n+1}}] = E\left[E\left[s^{\sum_{r=1}^{X_n} \xi_{n,r} + Y_{n+1}} \mid X_n\right]\right]$$

由于给定 X_n 后, $\xi_{n,r}$ 与 Y_{n+1} 均相互独立, 我们可以将条件期望拆分:

$$\begin{aligned} E\left[s^{\sum_{r=1}^{X_n} \xi_{n,r} + Y_{n+1}} \mid X_n\right] &= E[s^{Y_{n+1}}] \cdot \prod_{r=1}^{X_n} E[s^{\xi_{n,r}}] \\ &= h(s) \cdot (\phi(s))^{X_n} \end{aligned}$$

对其取无条件期望, 得到母函数的递推关系:

$$G_{n+1}(s) = E[(\phi(s))^{X_n}] \cdot h(s) = G_n(\phi(s))h(s)$$

记 $\phi_k(s)$ 为 $\phi(s)$ 的 k 次复合, 即 $\phi_0(s) = s, \phi_k(s) = \phi(\phi_{k-1}(s))$ 。由于初始状态 $X_0 = 0$, 有 $G_0(s) = E[s^0] = 1$ 。依次迭代上述递推关系, 可得 $G_n(s)$ 的通项公式:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= G_0(\phi(s))h(s) = h(s) \\ G_2(s) &= G_1(\phi(s))h(s) = h(\phi(s))h(s) \\ &\dots \\ G_n(s) &= \prod_{k=0}^{n-1} h(\phi_k(s)) \end{aligned}$$

接下来我们证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $G_n(s)$ 收敛于一个合法的概率母函数 $\pi(s)$ 。对于任意非负整数随机变量 Z 及其母函数 $F(s) = E[s^Z]$, 在 $s \in [0, 1]$ 上恒有代数不等式 $1 - s^k = (1 - s)(1 + s + \dots + s^{k-1}) \leq k(1 - s)$, 从而:

$$1 - F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z = k)(1 - s^k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(Z = k)k(1 - s) = F'(1)(1 - s)$$

应用上述不等式于 $\phi(s)$ 和 $h(s)$, 有:

$$1 - \phi_k(s) \leq \mu(1 - \phi_{k-1}(s)) \leq \dots \leq \mu^k(1 - s)$$

$$1 - h(\phi_k(s)) \leq \lambda(1 - \phi_k(s)) \leq \lambda\mu^k(1 - s)$$

为了考察无穷乘积 $\prod_{k=0}^{\infty} h(\phi_k(s))$ 的收敛性, 等价于考察级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - h(\phi_k(s)))$ 的收敛性:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - h(\phi_k(s))) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\mu^k(1 - s) = \frac{\lambda(1 - s)}{1 - \mu}$$

由于 $\mu < 1$ 且 $\lambda < \infty$, 该级数对所有 $s \in [0, 1]$ 一致收敛。因此, 无穷乘积绝对收敛且非零 (当 $s \in [0, 1]$ 时), 极限 $\pi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(s) = \prod_{k=0}^{\infty} h(\phi_k(s))$ 存在。

令 $s \rightarrow 1^-$, 有 $\lim_{s \rightarrow 1^-} \pi(s) \geq \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{\lambda(1-s)}{1-\mu}\right) = 1$, 故 $\pi(1) = 1$, 即极限函数连续。

根据母函数的连续性定理, 序列 $\{X_n\}$ 依分布收敛于一个具有母函数 $\pi(s)$ 的随机变量。因为 $\{X_n\}$ 是时齐马氏链, 其极限分布必然是该过程的不变分布。故 $\{X_n\}$ 具有不变分布 π 。

(2) 这部分证明极为直接, 只需对第 (1) 问中建立的母函数递推关系两端取极限即可。已知:

$$G_{n+1}(s) = G_n(\phi(s))h(s)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由于 $\{X_n\}$ 依分布收敛至不变分布 π , 其母函数必定逐点收敛, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{n+1}(s) = \pi(s)$$

同时, 由于 $\phi(s) \in [0, 1]$ 也是一个合法的输入, 右侧有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\phi(s)) = \pi(\phi(s))$$

将极限分别代入递推关系的左右两端, 立刻得到:

$$\pi(s) = \pi(\phi(s))h(s)$$

该等式的物理意义为: 在达到平稳状态后, 上一代的不变分布经过一次繁衍 (代入 $\phi(s)$) 并加上当代的移民 (乘以 $h(s)$), 仍然等于当代的平稳分布 (等于 $\pi(s)$)。□

1.12 综合练习题

1. 试举出三个生灭过程的例子, 分别是是非常返的、正常返的和零常返的。

Proof. 生灭过程的常返性取决于平均回返时间 $E_i\tau_i$ 以及回返概率 f_{ii} 。以下给出三种典型的例子:

- **非常返 (Transient):** 考虑状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 的随机游走。转移概率为:

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 1$$

令 $p_{00} = 1$ (即 0 为吸收态)。在这种情况下, 从任何状态 $i > 0$ 出发, 过程都有一定的概率被 0 吸收而永远不再回到 i 。或者更一般地, 考虑 $p > 1/2$ 的无限随机游走, 由于存在向右的漂移, 过程以概率 1 趋向无穷, 故所有状态均为非常返。

- **正常返 (Positive Recurrent):** 考虑有限状态空间 $S = \{0, 1, \dots, N\}$ 上的对称随机游走, 并规定边界条件为循环链 (即 $N+1 \equiv 0$):

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad \forall i \in S \pmod{N+1}$$

由于状态空间有限且不可约, 该链必然是正常返的。此时不变分布为均匀分布 $\pi_i = \frac{1}{N+1}$, 平均回返时间 $E_i\tau_i = \frac{1}{\pi_i} = N+1 < \infty$ 。

- **零常返 (Null Recurrent):** 考虑整个整数集 $S = \mathbb{Z}$ 上的对称简单随机游走:

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

已知该过程是常返的 (回返概率 $f_{ii} = 1$), 但由于状态空间无限且没有偏向性, 平均回返时间:

$$E_i\tau_i = +\infty$$

因此, 所有状态均为零常返。□

2. 假设 S 有限且 \mathbf{P} 不可约。

- (1) 证明: 若 \mathbf{P} 可逆, 则 \mathbf{P} 的所有特征根为实数。(注: \mathbf{P} 与对称矩阵 \mathbf{Q} 相似, 其中 $q_{ij} = \sqrt{\pi_i}p_{ij}/\sqrt{\pi_j}$ 。)
- (2) 举例说明: 特征根为实数的转移矩阵未必是可逆的。

Proof. (1) 由于马氏链不可约且状态空间有限, 存在唯一的不变分布 $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ 且满足 $\pi_i > 0$ 。由 \mathbf{P} 可逆可知, 满足细致平衡方程:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad \forall i, j \in S$$

取对角矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}(\sqrt{\pi_1}, \sqrt{\pi_2}, \dots, \sqrt{\pi_n})$ 。考虑矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}$, 其元素为:

$$q_{ij} = \sqrt{\pi_i} p_{ij} \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} = \frac{\sqrt{\pi_i} p_{ij}}{\sqrt{\pi_j}}$$

根据细致平衡方程, 有 $\sqrt{\pi_i} p_{ij} = \frac{\pi_i p_{ij}}{\sqrt{\pi_i}} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\sqrt{\pi_i}}$, 代入上式得:

$$q_{ij} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\sqrt{\pi_i} \sqrt{\pi_j}} = \frac{\sqrt{\pi_j} p_{ji}}{\sqrt{\pi_i}} = q_{ji}$$

因此, \mathbf{Q} 是一个实对称矩阵。由于相似矩阵具有相同的特征值, 且实对称矩阵的特征值均为实数, 故 \mathbf{P} 的所有特征根均为实数。

(2) 取转移矩阵如下:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

首先计算其特征多项式 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}|$:

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}| &= \lambda^2(\lambda - 3/4) - \frac{1}{16} - \frac{3}{4}(\lambda - 3/4) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda/4 - 1/2) = 0 \end{aligned}$$

解得三个根均为实根。

下面通过细致平衡方程检验其可逆性。若存在平稳分布 π 使得该链可逆, 则必须满足:

- $\pi_1 p_{13} = \pi_3 p_{31} \implies 0 = \frac{1}{4} \pi_3 \implies \pi_3 = 0$
- $\pi_2 p_{21} = \pi_1 p_{12} \implies 0 = \frac{1}{4} \pi_1 \implies \pi_1 = 0$

这与 $\sum \pi_i = 1$ 矛盾。因此, 该马氏链不可逆。 □

3. 假设某地区的天气可分为晴天、阴天、雨天。若某天是晴天, 则第二天等可能为阴天或雨天; 若某天为阴天 (或雨天), 则第二天有 1/2 的可能继续为阴天 (或雨天), 有 1/4 的可能为晴天, 有 1/4 的可能为雨天 (或阴天)。

- (1) 试建立马氏链以描述该地区的天气变化。
- (2) 这个马氏链有可逆分布吗?
- (3) 试求出平均而言, 该地区出现晴天、阴天、雨天的比例。
- (4) 两年后的元旦节该地区下雨的概率大概是多少?

Proof. (1) 设状态空间 $S = \{0, 1, 2\}$, 其中 0 代表晴天, 1 代表阴天, 2 代表雨天。根据题意, 天气的状态转移仅与当前状态有关, 构成一个马氏链。其转移概率如下:

- 若当前为晴天 (0): $p_{01} = 1/2, p_{02} = 1/2, p_{00} = 0$ 。
- 若当前为阴天 (1): $p_{11} = 1/2, p_{10} = 1/4, p_{12} = 1/4$ 。
- 若当前为雨天 (2): $p_{22} = 1/2, p_{20} = 1/4, p_{21} = 1/4$ 。

故其转移概率矩阵为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) 若马氏链可逆, 则存在概率分布 π 满足细致平衡方程: $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ 。观察矩阵 \mathbf{P} 可见其对称性: $p_{12} = p_{21} = 1/4$, 且 $p_{01}/p_{10} = (1/2)/(1/4) = 2$, $p_{02}/p_{20} = (1/2)/(1/4) = 2$ 。直接验证平衡关系:

$$\pi_0 \cdot \frac{1}{2} = \pi_1 \cdot \frac{1}{4} \implies \pi_1 = 2\pi_0$$

$$\pi_0 \cdot \frac{1}{2} = \pi_2 \cdot \frac{1}{4} \implies \pi_2 = 2\pi_0$$

由于满足细致平衡条件（且可以解出 $\pi = (1/5, 2/5, 2/5)$ ），故该马氏链存在可逆分布。

(3) 由于该链不可约且正常返，由遍历定理知各状态出现的长期比例即为其平稳分布 π 。解方程组 $\pi \mathbf{P} = \pi$ 且 $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ ：

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_0 \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \pi_1 + \pi_2 = 4\pi_0 \\ 2\pi_0 + 2\pi_1 + \pi_2 = 4\pi_1 \\ 2\pi_0 + \pi_1 + 2\pi_2 = 4\pi_2 \end{cases}$$

解得 $\pi_0 = 1/5, \pi_1 = 2/5, \pi_2 = 2/5$ 。故平均而言，晴天、阴天、雨天的比例为 $1:2:2$ 。

(4) “两年后”属于长期行为，由于马氏链是非周期的（存在自环 $p_{11}, p_{22} > 0$ ）且不可约正常返，其状态分布将收敛于平稳分布。故两年后的元旦节下雨的概率近似等于平稳分布中“雨天”的概率：

$$P(\text{下雨}) \approx \pi_2 = \frac{2}{5}$$

□

4. 假设 $\{X_n\}$ 是 \mathbb{Z}_+ 上的马氏链，转移概率如下：

$$p_{01} = 1, \quad p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1, \quad p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha p_{i,i-1}, \quad i \geq 1.$$

- (1) 试根据 α 的取值判断该马氏链是否常返。
- (2) 若正常返，试求不变分布。
- (3) 若非常返，试求 $P_0(\sigma_0 < \infty)$ 。

Proof. 根据转移概率 $p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1$ 以及 $p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha p_{i,i-1}$ ，可解得转移概率的具体形式：对于 $i \geq 1$ ，记 $\mu_i = p_{i,i-1}$ ， $\lambda_i = p_{i,i+1}$ ，则有

$$\mu_i = \frac{1}{1 + \left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha}, \quad \lambda_i = \frac{\left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha}{1 + \left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha}$$

该马氏链为 \mathbb{Z}_+ 上的生灭链。

(1) 引入生灭链的判别常数 R 。定义 $\gamma_k = \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$ ，则有：

$$\gamma_k = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha} = \left(\prod_{i=1}^k \frac{i}{i+1}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{k+1}\right)^\alpha = \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

生灭链常返的充要条件是 $R = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$ （约定 $\gamma_0 = 1$ ）。计算级数：

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

根据 p -级数的收敛性可知：

- 当 $\alpha \leq 1$ 时， $R = \infty$ ，马氏链为常返的。
- 当 $\alpha > 1$ 时， $R < \infty$ ，马氏链为非常返的。

(2) 生灭链存在不变分布的充要条件为归一化常数 $C < \infty$ 。

$$\rho_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = n^\alpha + (n+1)^\alpha, \quad \rho_0 = 1$$

由此得归一化常数为：

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} (k^\alpha + (k+1)^\alpha)$$

当 $\alpha < -1$ 时，级数 C 收敛，此时马氏链正常返。其唯一的不变分布为：

$$\pi_0 = \frac{1}{C}, \quad \pi_n = \frac{\rho_n}{C} = \frac{n^\alpha + (n+1)^\alpha}{\sum_{k=0}^{\infty} (k^\alpha + (k+1)^\alpha)}$$

(3) 当 $\alpha > 1$ 时, 马氏链是非常返的。
 由于 $p_{01} = 1$, 根据全概率公式及对称性, 有:

$$P_0(\sigma_0 < \infty) = 1 - P_0(\sigma_0 = \infty) = 1 - P_1(\sigma_0 = \infty) = P_1(\sigma_0 < \infty)$$

设 $\eta_i = P_i(\sigma_0 < \infty)$ 为从状态 i 出发回到 0 的概率。根据首步分析法, 对于 $i \geq 1$, 有差分方程:

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \eta_{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \eta_{i-1}$$

且边界条件为 $\eta_0 = 1$ 。整理上式得:

$$(\lambda_i + \mu_i)\eta_i = \lambda_i \eta_{i+1} + \mu_i \eta_{i-1} \implies \eta_{i+1} - \eta_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} (\eta_i - \eta_{i-1})$$

记 $s_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} = \left(\frac{i}{i+1}\right)^\alpha$ 。递推可得:

$$\eta_n - \eta_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_{i+1} - \eta_i) = (\eta_1 - \eta_0) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^i s_j \right)$$

注意到 $\prod_{j=1}^i s_j = \prod_{j=1}^i \left(\frac{j}{j+1}\right)^\alpha = \frac{1}{(i+1)^\alpha}$ 。令 $n \rightarrow \infty$, 由于链非常返且状态空间趋向无穷, 有 $\eta_n \rightarrow 0$ 。代入上式:

$$0 - \eta_1 = (\eta_1 - 1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^\alpha}$$

整理得 η_1 的表达式:

$$\eta_1 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}} = \frac{\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}}{1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}}$$

记 $T = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}$, 则:

$$P_0(\sigma_0 < \infty) = \eta_1 = \frac{T}{1+T}$$

□

5. 设 $\{S_n\}$ 是一维随机游走, $S_0 = 0$, 步长分布为 $P(\xi = 1) = 1 - P(\xi = -1) = p$, 其中 $1/2 < p < 1$ 。对任意整数 k , 记 $\tau_k = \inf\{n \geq 0 : S_n = k\}$ 。试求:

- (1) $P_0(\tau_k = n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (2) $E_0 \tau_k$;
- (3) $Y := \min\{S_0, S_1, S_2, \dots\}$ 的概率分布。

Proof. 设 $\{S_n\}$ 为非对称简单随机游走, $S_0 = 0$, 步长 ξ_i 独立同分布且 $P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = -1) = q = 1 - p$, 其中 $p > 1/2$ 。

(1) 首先考虑 n 与 k 的关系:

- 若 $n < k$, 显然 $P_0(\tau_k = n) = 0$;
- 若 $n \geq k$ 且 $n + k$ 为奇数, 由于每一步位移均为 ± 1 , 无法到达 k , 故 $P_0(\tau_k = n) = 0$ 。

当 $n \geq k$ 且 $n + k = 2m$ 为偶数时, 事件 $\{\tau_k = n\} \subseteq \{S_n = k\}$ 。考虑从 0 到 k 的所有轨道, 记向右步数为 u , 向左步数为 d 。由

$$\begin{cases} u + d = n \\ u - d = k \end{cases} \implies u = \frac{n+k}{2}, \quad d = \frac{n-k}{2}$$

则到达该点的总概率为 $P_0(S_n = k) = \binom{n}{u} p^u q^d$ 。

记集合 $A = \{S_n = k\}$, $B = \{\tau_k = n\}$ 。根据反射定律, 在所有到达 k 的路径中, 不属于首次到达的路径 (即在 n 步之前已经触碰过 k 的路径) 与到达 $k+2$ 的路径之间存在一一对应关系, 我们有:

$$P_0(\tau_k = n) = P_0(S_n = k) - P_0(S_n = k+2)$$

由组合数展开可知:

$$P_0(S_n = k+2) = \frac{n-k}{n+k+2} P_0(S_n = k)$$

代入上式整理得:

$$P_0(\tau_k = n) = \left(1 - \frac{n-k}{n+k}\right) P_0(S_n = k) = \frac{k}{n} P_0(S_n = k)$$

考虑 $k < 0$ 的同理情况, 引入绝对值符号, 得到最终表达式:

$$P_0(\tau_k = n) = \frac{|k|}{n} P_0(S_n = k) = \frac{|k|}{n} \binom{n}{\frac{n+|k|}{2}} p^{\frac{n+|k|}{2}} q^{\frac{n-|k|}{2}}$$

(2) 由于随机游走具有平移不变性, 从 i 到达 $i+1$ 所需的平均步数与从 0 到达 1 的平均步数相等。记 $E_0\tau_1$ 为从 0 首次到达 1 的期望时间。根据期望的线性性质, 对于 $k > 0$:

$$E_0\tau_k = E_0\tau_1 + E_1\tau_2 + \cdots + E_{k-1}\tau_k = kE_0\tau_1$$

下面通过分析第一步的转移情况来建立 $E_0\tau_1$ 的方程:

- 以概率 p 向右跳一步到达 1, 此时耗时 1 步, 过程结束。
- 以概率 q 向左跳一步到达 -1 , 此时耗时 1 步。由于目标是到达 1, 此时距离目标变为 2 步。根据强马氏性, 过程等价于: 先从 -1 回到 0 (期望耗时 $E_0\tau_1$), 再从 0 到达 1 (期望耗时 $E_0\tau_1$)。

由全期望公式可得:

$$E_0\tau_1 = p \cdot 1 + q \cdot (1 + E_0\tau_1 + E_0\tau_1)$$

整理得:

$$E_0\tau_1 = 1 + 2qE_0\tau_1 \implies E_0\tau_1(1 - 2q) = 1$$

由于 $1 - 2q = 1 - 2(1-p) = 2p - 1$, 代入上式:

$$E_0\tau_1 = \frac{1}{2p-1}$$

故最终得到:

$$E_0\tau_k = \frac{k}{2p-1} = \frac{k}{p-q}$$

(注: 由于 $p > 1/2$, 有 $p > q$, 故期望时间有限。若 $p \leq 1/2$, 则 $E_0\tau_1 = \infty$ 。)

(3) 由于 $p > q$, 游走具有向右的漂移。最小值 Y 只能取负整数或零。考虑事件 $\{Y \geq -m\}$, 这等价于游走永远不会到达 $-(m+1)$ 。利用 $P_0(\tau_{-a} < \infty) = (q/p)^a$ (当 $p > q, a > 0$ 时):

$$P_0(Y \geq -m) = 1 - P_0(\tau_{-(m+1)} < \infty) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1}$$

由此可得 $Y = -j$ 的分布:

$$\begin{aligned} P_0(Y = -j) &= P_0(Y \geq -j) - P_0(Y \geq -j+1) \\ &= \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{j+1}\right) - \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^j\right) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^j - \left(\frac{q}{p}\right)^{j+1} = \left(1 - \frac{q}{p}\right) \left(\frac{q}{p}\right)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

故 $-Y$ 服从参数为 $1 - q/p$ 的几何分布。 □

6. 符号同上题. 假设 N, M 为正整数, 记 $\tau = \min\{\tau_{-M}, \tau_N\}$ 。

- (1) 证明 $P_0(\tau < \infty) = 1$ 。
- (2) 求 $P_0(S_\tau = N)$ 与 $E_0\tau$ 。

Proof. (1) 设 $\{S_n\}$ 为非对称简单随机游走, $P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = -1) = q$, 且 $p + q = 1$. 该问题属于典型的“赌徒输光问题”, 区间为 $[-M, N]$.

要证明随机游走在有限时间内必然触碰边界 $-M$ 或 N . 考虑长度为 $L = N + M$ 的路径. 如果在连续的 L 步中, 游走一直向右移动, 则必然会触碰边界 N . 在任意时刻出发, 这种极端情况发生的概率至少为 $\delta = \min(p, q)^L > 0$. 因此, 游走在 n 个长度为 L 的时间段内均未触碰边界的概率满足:

$$P_0(\tau > nL) \leq (1 - \delta)^n$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由于 $1 - \delta < 1$, 上式右端趋于 0. 根据概率的连续性:

$$P_0(\tau = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(\tau > n) = 0$$

故 $P_0(\tau < \infty) = 1 - P_0(\tau = \infty) = 1$.

(2) 设 $u_i = P_i(S_\tau = N)$, 即从状态 i 出发先到达 N 的概率. 由全概率公式 (首步分析法):

$$u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}, \quad -M < i < N$$

边界条件为 $u_{-M} = 0, u_N = 1$. 该二阶线性差分方程的特征方程为 $pr^2 - r + q = 0$, 解得根为 $r_1 = 1, r_2 = q/p$. 记 $\alpha = q/p$, 由于 $p > 1/2$, 则 $\alpha \neq 1$. 通解为 $u_i = A + B\alpha^i$. 代入边界条件解得:

$$P_0(S_\tau = N) = u_0 = \frac{1 - \alpha^M}{1 - \alpha^{M+N}}, \quad \text{其中 } \alpha = \frac{q}{p}$$

接下来求 $e_i = E_i\tau$. 由首步分析法建立方程:

$$e_i = p(1 + e_{i+1}) + q(1 + e_{i-1}) = 1 + pe_{i+1} + qe_{i-1}, \quad -M < i < N$$

边界条件为 $e_{-M} = 0, e_N = 0$. 非齐次方程的特解可设为 $e_i^* = \frac{i}{q-p}$. 齐次部分通解形式同上. 联立边界条件解得 $E_0\tau$ 的表达式:

$$E_0\tau = \frac{(N+M)}{p-q} \cdot \frac{1 - \alpha^M}{1 - \alpha^{N+M}} - \frac{M}{p-q}$$

整理可得最终形式:

$$E_0\tau = \frac{(N+M)P_0(S_\tau = N) - M}{p-q}$$

□

7. 设 $\{X_n\}$ 是状态空间 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的马氏链, 转移矩阵如下:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (1) 该马氏链是否不可约? 是否非周期?
- (2) 求其不变分布.
- (3) 设 $X_0 = 1$, 求再次回到状态 1 所需要的平均步数.
- (4) 求从状态 1 出发到达状态 4 所需要的平均步数.
- (5) 设 $X_0 = 1$, 求该马氏链到达状态 3 之前到达状态 5 的概率.

Proof. (1) 根据转移矩阵 \mathbf{P} 绘制状态转移图, 可见存在路径: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ 等. 所有状态 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 之间均互通, 且状态空间有限, 故该马氏链是不可约的.

关于周期性, 观察从状态 1 出发回到 1 的路径长度:

- 路径 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ 长度为 3, 故 $p_{11}^{(3)} > 0$;
- 路径 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ 长度为 4, 故 $p_{11}^{(4)} > 0$.

由于 $\gcd(3, 4) = 1$, 状态 1 是非周期的。由不可约性可知, 该马氏链全状态非周期。

(2) 设不变分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$, 解方程组 $\pi \mathbf{P} = \pi$ 且 $\sum \pi_i = 1$ 。对应线性方程组为:

$$\begin{cases} \pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 = \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 = \pi_3 \\ \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 = \pi_4 \\ \frac{4}{5}\pi_2 + \frac{3}{5}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_5 = \pi_5 \end{cases}$$

解得比例关系: $\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1, \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1, \pi_4 = \frac{3}{10}\pi_1, \pi_5 = \frac{7}{5}\pi_1$ 。代入 $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$, 得 $\frac{37}{10}\pi_1 = 1$ 。故不变分布为:

$$\pi = \left(\frac{10}{37}, \frac{5}{37}, \frac{5}{37}, \frac{3}{37}, \frac{14}{37} \right)$$

(3) 由马氏链性质, 再次回到状态 1 所需的平均步数 $E_1\sigma_1$ 等于不变分布分量的倒数:

$$E_1\sigma_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{37}{10} = 3.7$$

(4) 设 x_i 为从状态 i 出发到达状态 4 的平均步数, 则 $x_4 = 0$ 。由首步分析法列方程:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 = 1 + \frac{4}{5}x_5 \\ x_3 = 1 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 = 1 + \frac{3}{5}x_5 \\ x_5 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 \implies x_5 = 2 + x_1 \end{cases}$$

代入求解: $x_2 = 1 + \frac{4}{5}(2 + x_1) = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}x_1, x_3 = 1 + \frac{3}{5}(2 + x_1) = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1$ 。

代入 x_1 方程: $x_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{5} + \frac{4}{5}x_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1\right) = 1 + \frac{12}{5} + \frac{7}{10}x_1 = \frac{17}{5} + \frac{7}{10}x_1$ 。

解得 $\frac{3}{10}x_1 = \frac{17}{5} \implies x_1 = \frac{34}{3}$ 。

(5) 设 P_i 为从状态 i 出发, 在到达状态 3 之前到达 5 的概率。显然 $P_3 = 0, P_5 = 1$ 。由首步分析法:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{2}P_2 \\ P_2 = \frac{1}{5}P_4 + \frac{4}{5}P_5 = \frac{1}{5}P_4 + \frac{4}{5} \\ P_4 = 1 \cdot P_1 = P_1 \end{cases}$$

联立得: $P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}P_1 + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{10}P_1 + \frac{2}{5}$ 。解得 $\frac{9}{10}P_1 = \frac{2}{5} \implies P_1 = \frac{4}{9}$ 。故该概率为 $\frac{4}{9}$ 。 \square

8. 设 J_1, J_2, \dots 为一列独立同分布随机变量, $P(J_1 = 1) = p, P(J_1 = 0) = 1 - p$, 其中 $0 < p < 1$ 。令 $X_0 = J_0 = 0$ 。对任意 $n \geq 1$, 若 $J_n = 0$, 则令 $X_n = 0$; 若 $J_n = \dots = J_{n-k+1} = 1$ 且 $J_{n-k} = 0$, 则令 $X_n = k$ 。

(1) 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间和转移概率。

(2) 证明: 该马氏链不可约、正常返, 并求其不变分布。

(3) 对于正整数 k , 令 $T_k = \min\{n \geq k : J_n = J_{n-1} = \dots = J_{n-k+1} = 1\}$, 试求 ET_k 。

Proof. (1) 根据题意, 变量 X_n 记录的是到时刻 n 为止连续出现的 1 的个数。

状态空间: $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ 。

转移概率: 对于任意状态 $i \in S$, 下一步若出现 $J_{n+1} = 1$ (概率为 p), 则连续计数加 1; 若出现 $J_{n+1} = 0$ (概率为 $1 - p$), 则计数清零。

$$P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,0} = 1 - p, \quad \forall i \geq 0.$$

(2) **不可约性:** 从状态 0 出发, 经过 k 步跳向右侧, 可以到达任意状态 k (概率为 $p^k > 0$); 而从任意状态 k 均可一步回到 0 (概率为 $1 - p > 0$)。因此所有状态互通, 马氏链不可约。

不变分布: 设平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$, 满足 $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$ 。

1. 对于 $j = 0$: $\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(1 - p) = (1 - p) \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 - p$ 。

2. 对于 $j \geq 1$: $\pi_j = \pi_{j-1}P_{j-1,j} = p\pi_{j-1}$ 。

递推可得: $\pi_j = (1-p)p^j, \forall j \geq 0$. 验证归一化: $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} p^j = (1-p) \cdot \frac{1}{1-p} = 1$. 由于存在唯一平稳分布, 该不可约链为正常返。

(3) 设 E_i 为从状态 i 出发首次到达状态 k 的期望步数, 则 $ET_k = E_0$, 边界条件为 $E_k = 0$. 根据首步分析法:

$$\begin{cases} E_0 = 1 + pE_1 + (1-p)E_0 \\ E_1 = 1 + pE_2 + (1-p)E_0 \\ \vdots \\ E_{k-1} = 1 + pE_k + (1-p)E_0 \end{cases}$$

整理第一式得 $E_1 = E_0 - \frac{1}{p}$. 将 $E_i = 1 + pE_{i+1} + (1-p)E_0$ 改写为 $E_i - E_{i+1} = \frac{1+(1-p)E_0 - E_i}{p}$.

通过递推可得 $E_i - E_{i+1} = \frac{1}{p^{i+1}}$. 则:

$$E_0 - E_k = \sum_{i=0}^{k-1} (E_i - E_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{p^{i+1}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k}$$

由于 $E_k = 0$, 利用等比级数求和公式得:

$$ET_k = E_0 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p^i} = \frac{\frac{1}{p}(1-p^{-k})}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1-p^k}{p^k(1-p)}$$

□

9*. 假设马氏链 $\{X_n\}$ 不可约, 有可逆分布. 试证明下列两个命题等价:

- (1) 对任意 $i, j \in S$ 与 $n \geq 0, P_i(X_n = i) = P_j(X_n = j)$;
- (2) 对任意 $i, j \in S$ 与 $n \geq 0, P_i(\tau_j = n) = P_j(\tau_i = n)$.

Proof. 已知马氏链 $\{X_n\}$ 不可约且具有可逆分布 π . 由于存在不变概率分布 π , 该链必为正常返. 由可逆性可知, 对任意 $i, j \in S, n \geq 0$, 有 $\pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j p_{ji}^{(n)}$.

1. 证明 (1) \implies (2)

假设对任意 $i, j \in S, n \geq 0$, 有 $p_{ii}^{(n)} = p_{jj}^{(n)}$. 根据马氏链的遍历定理, 由于链不可约且正常返, 有:

$$\pi_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_{ii}^{(n)}$$

由于对每一个 $n, p_{ii}^{(n)}$ 的值都与 i 无关, 因此上述极限对所有 i 也相等, 即:

$$\pi_i = \pi_j = \frac{1}{|S|} \quad (\text{若 } S \text{ 为无限集, 则此处的均匀分布含义为常数测度})$$

将 $\pi_i = \pi_j$ 代入可逆性公式 (*), 得:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{ji}^{(n)}, \quad \forall i, j \in S, n \geq 0$$

考虑首次到达概率 $f_{ij}^{(n)} = P_i(\tau_j = n)$. 由 Chapman-Kolmogorov 方程的变形 (首次到达分解公式):

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

同理, 对于从 j 到 i 的转移有:

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$$

由于已知 $p_{ij}^{(n)} = p_{ji}^{(n)}$ 且 $p_{ii}^{(m)} = p_{jj}^{(m)}$, 对上述二式利用数学归纳法:

- 当 $n = 1$ 时, $p_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{(1)}$ 且 $p_{ji}^{(1)} = f_{ji}^{(1)}$, 由 $p_{ij}^{(1)} = p_{ji}^{(1)}$ 知 $f_{ij}^{(1)} = f_{ji}^{(1)}$.
- 假设对于所有 $k < n$, 均有 $f_{ij}^{(k)} = f_{ji}^{(k)}$.

• 对于 n , 由 $p_{ij}^{(n)} = p_{ji}^{(n)}$ 可得:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + f_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n-1} f_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} + f_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(0)}$$

由于 $p_{ii}^{(0)} = p_{jj}^{(0)} = 1$ 以及归纳假设, 前 $n-1$ 项对应相等, 从而必有 $f_{ij}^{(n)} = f_{ji}^{(n)}$ 。

故命题 (2) 成立。

2. 证明 (2) \implies (1)

假设对任意 $i, j \in S, n \geq 0$, 有 $f_{ij}^{(n)} = f_{ji}^{(n)}$ 。定义生成函数:

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n, \quad F_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$$

由首次到达分解公式可知:

$$P_{ij}(z) = \delta_{ij} + F_{ij}(z)P_{jj}(z)$$

根据 (2), 有 $F_{ij}(z) = F_{ji}(z)$ 。联立方程组:

$$\begin{cases} P_{ij}(z) = F_{ij}(z)P_{jj}(z) \\ P_{ji}(z) = F_{ji}(z)P_{ii}(z) \end{cases} \implies \frac{P_{ij}(z)}{P_{jj}(z)} = \frac{P_{ji}(z)}{P_{ii}(z)}$$

由可逆性 $\pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j p_{ji}^{(n)}$, 对 n 求和得 $\pi_i P_{ij}(z) = \pi_j P_{ji}(z)$ 。代入上式:

$$\frac{P_{ij}(z)}{P_{jj}(z)} = \frac{\frac{\pi_i}{\pi_j} P_{ij}(z)}{P_{ii}(z)} \implies P_{ii}(z) = \frac{\pi_i}{\pi_j} P_{jj}(z)$$

观察 z^0 项: $p_{ii}^{(0)} = \frac{\pi_i}{\pi_j} p_{jj}^{(0)}$ 。由于 $p_{ii}^{(0)} = p_{jj}^{(0)} = 1$, 推得 $\pi_i = \pi_j$ 。既然 $\pi_i = \pi_j$ 为均匀分布, 则由 $P_{ii}(z) = \frac{\pi_i}{\pi_j} P_{jj}(z)$ 立即得到 $P_{ii}(z) = P_{jj}(z)$ 。比较幂级数系数得 $p_{ii}^{(n)} = p_{jj}^{(n)}$ 对所有 $n \geq 0$ 成立。故命题 (1) 成立。 \square

2 跳过程

2.1 泊松过程

1. 补充定义 $S_0 := 0$ 。对任意 $t \geq 0$ ，令

$$X_t := |\{n \geq 1 : S_n \leq t\}| = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1.1)$$

那么， X_t 表示时刻 t 之前闹钟响起的总次数。反过来，从计数过程 $\{X_t\}$ 也可以按如下方式计算出事件流及其等待时间：

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq n\}, \quad \forall n \geq 0; \quad \xi_n = S_n - S_{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.1.2)$$

事实上，上式对更大范围的随机过程都适用。

试举例说明：存在计数过程 $\{X_t\}$ ，使得通过 (2.1.2) 式得到的 $\{S_n\}$ 并不满足 (2.1.1) 式。

Proof. 核心在于：由 (2.1.1) 式 $X_t = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ 所定义的计数过程，必然是一个右连续的阶梯函数。

因此，只要原始的计数过程 $\{X_t\}$ 不满足右连续性，经过 (2.1.2) 提取到达时刻，再由 (2.1.1) 还原时，就会在间断点处发生取值的不一致。

考虑一个确定性的、左连续的计数过程 $\{X_t\}$ ，定义如下：

$$X_t = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

根据定义 $S_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq n\}$ ：

- 当 $n = 1$ 时， $S_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq 1\} = \inf(1, \infty) = 1$ 。
- 当 $n \geq 2$ 时， X_t 永远无法达到或超过 n ，故 $S_n = \infty$ 。

所以提取出的事件流为 $S_1 = 1, S_2 = \infty, S_3 = \infty, \dots$ 。

根据定义 $\tilde{X}_t = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ ：我们专门来考察间断点 $t = 1$ 这一时刻。因为 $S_1 = 1 \leq 1$ 成立，所以此时集合 $\{n \geq 0 : S_n \leq 1\}$ 中包含 1。因此：

$$\tilde{X}_1 = \sup\{0, 1\} = 1$$

对比原始过程与还原后的过程，在 $t = 1$ 时刻：

- 原始过程： $X_1 = 0$
- 还原过程： $\tilde{X}_1 = 1$

两者不相等，即 $\tilde{X}_t \neq X_t$ 。所以该计数过程通过 (2.1.2) 式得到的 $\{S_n\}$ 并不满足 (2.1.1) 式。 □

注：公式 (2.1.1) 和 (2.1.2) 能够完美互逆的充要前提是，计数过程 $\{X_t\}$ 的轨道必须是右连续且带有左极限的 (RCLL)。如果人为去掉右连续性，时间与状态的对偶映射双射关系就会破裂。

2. 假设 $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。证明：对任意 $t, s > 0$ ，

$$P(\xi - t > s \mid \xi > t) = P(\xi > s).$$

Proof. 已知随机变量 $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ ，其累积分布函数为 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$)。因此，它的尾概率为：

$$P(\xi > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}, \quad \forall x > 0$$

根据条件概率的定义：

$$\begin{aligned} P(\xi - t > s \mid \xi > t) &= \frac{P(\{\xi > t + s\} \cap \{\xi > t\})}{P(\xi > t)} \\ &= \frac{P(\xi > t + s)}{P(\xi > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

而等式的右侧正是:

$$P(\xi > s) = e^{-\lambda s}$$

即:

$$P(\xi - t > s \mid \xi > t) = P(\xi > s)$$

□

3. 假设 ξ, η 相互独立, 并且 $\xi \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $\eta \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ 。证明:

(1) $\min\{\xi, \eta\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$;

(2) $P(\xi < \eta) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 。

(注: 可从此题结论读解泊松流的叠加。)

Proof. (1) 令 $\gamma = \min\{\xi, \eta\}$ 。对任意 $x > 0$, 由 ξ, η 的独立性有:

$$P(\gamma > x) = P(\xi > x, \eta > x) = P(\xi > x)P(\eta > x)$$

代入指数分布的尾概率:

$$P(\gamma > x) = e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

故 γ 的累积分布函数为 $F(x) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}$, 即 $\min\{\xi, \eta\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。

(2) ξ, η 的联合密度函数为 $f(x, y) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}$ ($x, y > 0$)。

$$\begin{aligned} P(\xi < \eta) &= \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \left(\int_x^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

□

注: 对“泊松流叠加”的直观理解

假设有两个独立的泊松流 (例如: 甲路公交车和乙路公交车), 它们的到达速率分别为 λ_1 和 λ_2 。 ξ 和 η 分别代表下一辆甲路车和乙路车的等待时间。

- **合并后的速率:** 我们站在车站, 等任意一辆车 (甲或乙) 到来的等待时间, 显然是 $\min\{\xi, \eta\}$ 。第 3 题的结论 (1) 告诉我们, $\min\{\xi, \eta\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。这说明合并后的总车流依然是一个完美的泊松流, 且速率恰好是两者之和 $\lambda_1 + \lambda_2$ 。
- **事件溯源概率:** 第 3 题的结论 (2) $P(\xi < \eta) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 告诉我们, 最先等来的这辆车是甲路车 (即 ξ 比 η 先发生) 的概率, 刚好等于甲路车的速率在总速率中所占的比例。这极其符合我们的物理直觉: 谁发车越密集 (λ 越大), 下一辆是它的概率就越大。

4. 假设 $V, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ 相互独立, $P(V = k) = (1 - p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, \dots$, 并且 $\zeta_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $n = 1, 2, \dots$ 。令 $\xi = \zeta_1 + \dots + \zeta_V$ 。证明:

$$\xi \sim \text{Exp}(\lambda p).$$

(注: 试从此题结论读解泊松过程的细分。)

Proof. 已知 $\zeta_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, 故给定 $V = k$ 时, $\zeta_1 + \dots + \zeta_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ 。其条件密度函数为:

$$f_{V=k}(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, \quad x > 0$$

利用全概率公式计算 ξ 的边缘密度函数 $f_\xi(x)$:

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(V=k) \cdot f_{V=k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \cdot \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

提取与 k 无关的公因式，并利用泰勒展开 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$:

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &= \lambda p e^{-\lambda x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\lambda x(1-p)]^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda p e^{-\lambda x} \cdot e^{\lambda x(1-p)} \\ &= \lambda p e^{-\lambda p x} \end{aligned}$$

此即参数为 λp 的指数分布密度函数，故 $\xi \sim \text{Exp}(\lambda p)$ 。 □

注：对“泊松流细分”的直观理解

假设有一个速率为 λ 的主泊松流（例如：进入商场的总客流），每位顾客的到达间隔为 $\zeta_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。现在我们按特定条件对客流进行“过滤”或“细分”（例如：筛选出最终买单的顾客）。假设每位进店顾客买单的概率为 p ，且相互独立。

- **等待时间与几何分布：**为了等来第 1 位买单的顾客，我们需要经历 V 位进店顾客。显然， V 是一个服从几何分布（首个成功所需的试验次数）的随机变量， $P(V=k) = (1-p)^{k-1} p$ 。
- **细分后的流依然是泊松流：**我们等待这第 1 位买单顾客的实际总时间，就是前 V 个人的到达间隔之和，即 $\xi = \zeta_1 + \dots + \zeta_V$ 。第 4 题的结论告诉我们，经过这样随机求和后的总时间 ξ 依然服从指数分布，且 $\xi \sim \text{Exp}(\lambda p)$ 。
- **物理意义：**这意味着，从原泊松流中以概率 p 独立抽取事件后，保留下来的子流依然是一个泊松流，只不过它的发生变得更稀疏了，其新速率恰好是原速率按概率的折算，即 λp 。（同理，没买单的顾客构成的流也是泊松流，速率为 $\lambda(1-p)$ ）。

5. 假设某公交车站有甲、乙两路公交车，到达时刻是相互独立的泊松流，速率分别为 λ_1 与 λ_2 。求：

- (1) 在时间段 $[0, 1]$ 中恰好到达 3 辆公交车的概率；
- (2) 某人在车站等甲路车，在他等甲路车的时间段内，恰好经过 3 辆乙路车的概率。

Proof. (1) 记在时间段 $[0, t]$ 内到达的甲路车和乙路车数量分别为 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 。根据泊松流的合并定理，甲、乙两路车合并后的总到达过程 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 依然是一个泊松过程，且其速率为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。

在 $[0, 1]$ 时间段内，总到达车辆数 $N(1)$ 服从参数为 $(\lambda_1 + \lambda_2) \times 1$ 的泊松分布。因此，恰好到达 3 辆车的概率为：

$$P(N(1) = 3) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^3}{3!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

(2) **法一：**站在合并后的总泊松流视角看，每一辆到来的公交车，它是甲路车的概率为 $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ，是乙路车的概率为 $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ，且各车辆的所属路线相互独立。

“在等甲路车的时间段内，恰好经过 3 辆乙路车”这一事件，等价于：在总到达的车辆序列中，前 3 辆都是乙路车，而第 4 辆恰好是甲路车。这其实就是一个简单的独立重复试验过程，该事件的概率直接等于：

$$P(\text{前 3 辆乙, 第 4 辆甲}) = q \cdot q \cdot q \cdot p = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^3 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2^3}{(\lambda_1 + \lambda_2)^4}$$

法二：设该人等待甲路车的真实时间为 $T \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ 。在给定等待时间 $T = t$ 的条件下，乙路车到达的数量 $N_2(t)$ 服从参数为 $\lambda_2 t$ 的泊松分布。利用全概率公式对 T 积分：

$$\begin{aligned} P(N_2(T) = 3) &= \int_0^{+\infty} P(N_2(t) = 3 | T = t) f_T(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda_2 t)^3}{3!} e^{-\lambda_2 t} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^3}{3!} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt \end{aligned}$$

利用伽马积分公式 $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\mu t} dt = \frac{n!}{\mu^{n+1}}$, 代入 $n = 3, \mu = \lambda_1 + \lambda_2$ 得到:

$$P(N_2(T) = 3) = \frac{\lambda_1 \lambda_2^3}{3!} \cdot \frac{3!}{(\lambda_1 + \lambda_2)^4} = \frac{\lambda_1 \lambda_2^3}{(\lambda_1 + \lambda_2)^4}$$

□

6. 假设 $\{X_t\}$ 是速率为 λ 的泊松过程, T 与 $\{X_t\}$ 相互独立且 $T \sim \text{Exp}(\mu)$ 。试求 X_T 的分布列。

Proof. 利用全概率公式, 得 X_T 的分布:

$$P(X_T = k) = \int_0^{+\infty} P(X_t = k | T = t) f_T(t) dt$$

由于 $\{X_t\}$ 与 T 相互独立, 给定 $T = t$ 时, X_t 服从参数为 λt 的泊松分布, 代入得:

$$\begin{aligned} P(X_T = k) &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{\lambda^k \mu}{k!} \int_0^{+\infty} t^k e^{-(\lambda + \mu)t} dt \end{aligned}$$

利用 Gamma 积分公式 $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}}$, 我们令 $n = k, a = \lambda + \mu$, 得到:

$$\begin{aligned} P(X_T = k) &= \frac{\lambda^k \mu}{k!} \cdot \frac{k!}{(\lambda + \mu)^{k+1}} \\ &= \frac{\lambda^k \mu}{(\lambda + \mu)^{k+1}} \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

显然, 这是一个参数为 $p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ 的几何分布。

□

7. 假设某房产中介发布售楼信息的时刻是速率为 λ 的泊松流, 每条信息的房价服从 $U(300, 2000)$ (单位: 万元)。某先生只关注房价不超过 800 万元的信息。他读每条信息所花的时间是一个独立的随机变量, 服从 $U(1, 2)$ (单位: 小时)。将某 30 天中他关注的信息数目记为 X , 他读完这些信息所花的总时间记为 Y 小时 (注: 有可能 $Y \geq 30 \times 24$)。试求:

(1) X 的分布;

(2) $E \exp(aY)$, 其中 a 为常数。

Proof. (1) 根据题意, 原始的售楼信息发布过程是一个速率为 λ “条/天”的泊松流。某先生只关注房价不超过 800 万元的信息。由于房价服从 $U(300, 2000)$, 每条发布的信息成为“被关注信息”的概率 p 为:

$$p = P(300 \leq \text{房价} \leq 800) = \frac{800 - 300}{2000 - 300} = \frac{500}{1700} = \frac{5}{17}$$

根据泊松流的细分, 如果以概率 p 对泊松流进行独立抽样, 保留下来的“被关注信息”流依然是一个泊松流, 且其速率更新为 $\lambda' = \lambda p = \frac{5}{17} \lambda$ 。

因此, 在 $t = 30$ 天的时间段内, 他关注的信息数目 X 服从参数为 $\mu = 30\lambda' = \frac{150}{17} \lambda$ 的泊松分布。即:

$$X \sim \text{Poisson} \left(\frac{150}{17} \lambda \right)$$

其分布列为:

$$P(X = k) = \frac{\left(\frac{150}{17} \lambda \right)^k e^{-\frac{150}{17} \lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(2) 记阅读第 i 条信息花费的时间为 T_i (单位: 小时), 则 $T_i \sim U(1, 2)$. 且 $\{T_i\}$ 相互独立, 并与随机变量 X 独立. 阅读这 X 条信息所花的总时间 Y 可以表示为随机个随机变量之和:

$$Y = \sum_{i=1}^X T_i$$

(当 $X = 0$ 时, 约定 $Y = 0$). 这正是复合泊松过程在某一固定时间段下的随机变量形态.

要求 Y 的矩母函数 (MGF) $M_Y(a) = E[\exp(aY)]$. 利用全期望公式, 先在给定 X 的条件下求期望:

$$\begin{aligned} E[\exp(aY)] &= E \left[E \left[\exp \left(a \sum_{i=1}^X T_i \right) \mid X \right] \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^X E[\exp(aT_i)] \right] \\ &= E \left[(M_T(a))^X \right] \end{aligned}$$

其中 $M_T(a) = E[\exp(aT_1)]$ 是单次阅读时间的矩母函数.

计算 $T_1 \sim U(1, 2)$ 的矩母函数. 当 $a \neq 0$ 时:

$$M_T(a) = \int_1^2 e^{at} f_T(t) dt = \int_1^2 e^{at} \cdot 1 dt = \frac{e^{2a} - e^a}{a}$$

对于参数为 $\mu = \frac{150}{17} \lambda$ 的泊松随机变量 X , 其概率母函数形式为 $E[s^X] = \exp\{\mu(s-1)\}$. 将 $s = M_T(a)$ 代入该公式, 即可得到 Y 的期望指数:

$$\begin{aligned} E[\exp(aY)] &= \exp\{\mu(M_T(a) - 1)\} \\ &= \exp\left\{\frac{150}{17} \lambda \left(\frac{e^{2a} - e^a}{a} - 1\right)\right\} \end{aligned}$$

当 $a = 0$ 时, $E[\exp(0)] = 1$, 上式在 $a \rightarrow 0$ 时的洛必达极限同样为 1, 公式在全实数域成立. \square

8. 证明下列推论、命题与定理:

- (1) 证明 **推论 2.1.8 (马氏性)**: 对任意 $r \geq 1$, $0 \leq t_1 < \dots < t_r < t < t + s$, 以及单调上升的非负整数 $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_r \leq k \leq l$,

$$P(X_{t+s} = l \mid X_t = k, X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_r} = k_r) = P(X_{t+s} = l \mid X_t = k) = P(X_s = l - k).$$

- (2) 证明 **命题 2.1.10**: 在 $\{X_T = k\}$ 发生的条件下, (S_1, \dots, S_k) 的条件密度为

$$\frac{k!}{T^k} \cdot 1_{\{0 < s_1 < \dots < s_k < T\}}.$$

- (3) 证明 **命题 2.1.11 及其逆命题**: 假设 $Z_n, U_{n,i}, n, i = 1, 2, \dots$ 相互独立, 对任意 $n \geq 1$, Z_n 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $U_{n,i} \sim U(n-1, n), i = 1, 2, \dots$, 则

$$\Xi := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{U_{n,1}, \dots, U_{n,Z_n}\}$$

是泊松流。

- (4) 证明 **定理 2.1.12 与定理 2.1.13**:

定理 2.1.12 (泊松流/泊松过程的合并)

- (1) 假设 Ξ 与 $\hat{\Xi}$ 是相互独立的泊松流, 速率分别为 λ_1 和 λ_2 , 则 $\Xi \cup \hat{\Xi}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松流.
 (2) 假设 $\{X_t\}$ 与 $\{Y_t\}$ 是相互独立的泊松过程, 速率分别为 λ_1 和 λ_2 . 令 $Z_t = X_t + Y_t$, 则 $\{Z_t\}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。

定理 2.1.13 (泊松流的细分)

假设 Ξ 是速率为 λ 的泊松流, 则以概率 p 对 Ξ 进行独立抽样, 保留下来的点集 $\hat{\Xi}$ 与被剔除的点集 $\tilde{\Xi}$ 是相互独立的泊松流, 速率分别为 λp 与 $\lambda(1-p)$ 。

Proof. (1) 为书写简便, 记过去的历史事件为 $A = \{X_{t_1} = k_1, X_{t_2} = k_2, \dots, X_{t_r} = k_r, X_t = k\}$ 。我们要计算的条件概率为 $P(X_{t+s} = l | A)$ 。

在事件 A 发生的条件下已知 $X_t = k$, 未来的事件 $\{X_{t+s} = l\}$ 等价于增量事件 $\{X_{t+s} - X_t = l - k\}$ 。同理, 历史事件 A 可以等价地表示为各段不相交时间区间上增量的交集:

$$A = \{X_{t_1} = k_1, X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1, \dots, X_t - X_{t_r} = k - k_r\}$$

根据独立增量性, 在不相交的时间区间 $(t, t+s]$ 和 $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_r, t]$ 上的增量是相互独立的。这意味着未来的增量 $X_{t+s} - X_t$ 与过去的历史事件 A 完全独立。

因此有:

$$\begin{aligned} P(X_{t+s} = l | X_t = k, X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_r} = k_r) &= P(X_{t+s} - X_t = l - k | A) \\ &= P(X_{t+s} - X_t = l - k) \end{aligned}$$

同理, 如果我们在条件中只保留 $X_t = k$, 同样由独立增量性可知 $X_{t+s} - X_t$ 与 X_t (即 $X_t - X_0$) 独立, 从而:

$$P(X_{t+s} = l | X_t = k) = P(X_{t+s} - X_t = l - k | X_t = k) = P(X_{t+s} - X_t = l - k)$$

这就证明了等式的第一部分:

$$P(X_{t+s} = l | X_t = k, X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_r} = k_r) = P(X_{t+s} = l | X_t = k)$$

最后, 根据平稳增量性, 增量 $X_{t+s} - X_t$ 的分布只与时间间隔的长短 s 有关, 而与起点 t 无关:

$$P(X_{t+s} - X_t = l - k) = P(X_s = l - k)$$

综合以上结果, 原命题得证:

$$P(X_{t+s} = l | X_t = k, X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_r} = k_r) = P(X_{t+s} = l | X_t = k) = P(X_s = l - k).$$

(2) 根据泊松过程的定义, 在时间区间 $[0, T]$ 内恰好发生 k 次事件的概率为:

$$P(X_T = k) = \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}$$

接下来, 我们考察到达时刻 (S_1, \dots, S_k) 在区域 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < T$ 上的联合密度与事件 $\{X_T = k\}$ 同时发生的联合概率元。事件 $\{S_1 \in dt_1, S_2 \in dt_2, \dots, S_k \in dt_k, X_T = k\}$ 在逻辑上等价于: 前 k 个等待时间分别取特定值 $\xi_1 = t_1, \xi_2 = t_2 - t_1, \dots, \xi_k = t_k - t_{k-1}$, 并且第 $k+1$ 个等待时间必须跨越时刻 T , 即 $\xi_{k+1} > T - t_k$ 。

由于等待时间 $\xi_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$, 相乘得到联合分布的密度:

$$\begin{aligned} f_{S_1, \dots, S_k, X_T}(t_1, \dots, t_k, k) &= f_{\xi_1}(t_1) \cdot f_{\xi_2}(t_2 - t_1) \cdots f_{\xi_k}(t_k - t_{k-1}) \cdot P(\xi_{k+1} > T - t_k) \\ &= (\lambda e^{-\lambda t_1}) \cdot (\lambda e^{-\lambda(t_2 - t_1)}) \cdots (\lambda e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}) \cdot (e^{-\lambda(T - t_k)}) \\ &= \lambda^k e^{-\lambda T} \end{aligned}$$

在已知 $\{X_T = k\}$ 发生的条件下, 到达时刻 (S_1, \dots, S_k) 的条件密度函数为:

$$\begin{aligned} f_{S_1, \dots, S_k | X_T = k}(t_1, \dots, t_k) &= \frac{f_{S_1, \dots, S_k, X_T}(t_1, \dots, t_k, k)}{P(X_T = k)} \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda T}}{\frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}} \\ &= \frac{k!}{T^k} \end{aligned}$$

最后, 补上到达时刻必须满足单调递增且落在 $(0, T)$ 内的示性函数, 即得最终结论:

$$f(s_1, \dots, s_k | X_T = k) = \frac{k!}{T^k} \cdot \mathbf{1}_{\{0 < s_1 < \dots < s_k < T\}}$$

(3) 第一部分: 原命题的证明

已知 $Z_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$, 且给定 $Z_n = k$ 时, $U_{n,1}, \dots, U_{n,k} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(n-1, n)$, 所有变量相互独立。我们要证明由这些点构成的集合 Ξ 是一个速率为 λ 的泊松流。根据点过程理论, 只需证明以下两个条件:

1. 对于任意有界区间 $B \subset \mathbb{R}_+$, 落在 B 中的点数 $N(B) \sim \text{Poisson}(\lambda|B|)$, 其中 $|B|$ 为区间长度;
2. 对于任意互不相交的有界区间 $B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{R}_+$, 点数 $N(B_1), \dots, N(B_k)$ 相互独立。

验证条件 1: 由于 B 有界, 它可以被有限个单位区间覆盖。记 $B_i = B \cap (i-1, i]$ 。考虑落在 $(i-1, i]$ 上的点集。该区间内共有 Z_i 个点, 且服从均匀分布。给定总点数 $Z_i = k$, 每个点落入子集 B_i 的概率为 $p_i = \frac{|B_i|}{|(i-1, i]|} = |B_i|$ 。因此, 给定 $Z_i = k$ 时, B_i 中的点数 $N(B_i)$ 服从二项分布 $B(k, |B_i|)$ 。

利用全概率公式:

$$\begin{aligned} P(N(B_i) = j) &= \sum_{k=j}^{\infty} P(N(B_i) = j | Z_i = k) P(Z_i = k) \\ &= \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} |B_i|^j (1 - |B_i|)^{k-j} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \frac{|B_i|^j}{j!} e^{-\lambda} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(1 - |B_i|)^{k-j}}{(k-j)!} \lambda^k \end{aligned}$$

令 $m = k - j$, 将上式化简:

$$\begin{aligned} P(N(B_i) = j) &= \frac{(\lambda |B_i|)^j}{j!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1 - |B_i|)]^m}{m!} \\ &= \frac{(\lambda |B_i|)^j}{j!} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda(1 - |B_i|)} \\ &= \frac{(\lambda |B_i|)^j}{j!} e^{-\lambda |B_i|} \end{aligned}$$

得 $N(B_i) \sim \text{Poisson}(\lambda |B_i|)$ 。

由于对不同的 n , Z_n 与 $U_{n,i}$ 相互独立, 所以各个 $N(B_i)$ 也是相互独立的。利用独立泊松分布可加性:

$$N(B) = \sum_i N(B_i) \sim \text{Poisson}\left(\sum_i \lambda |B_i|\right) = \text{Poisson}(\lambda |B|)$$

条件 1 得证。

验证条件 2: 对于互不相交的区间 B_1, \dots, B_k , 将其各自按单位区间 $(n-1, n]$ 切片。由于不同单位区间上的生成过程 $(Z_n, U_{n,i})$ 完全独立; 而在同一个单位区间内, 由于给定总数后点是均匀洒落的, 落入不相交子区间的点数依然是相互独立的。故 $N(B_1), \dots, N(B_k)$ 相互独立。条件 2 得证。

综合可知 Ξ 是泊松流。

第二部分: 逆命题的证明

假设 Ξ 是一个速率为 λ 的泊松流, 我们需要证明它可以拆分为上述的 Z_n 与 $U_{n,i}$ 的形式。

考虑单位区间序列 $I_n = (n-1, n]$, $n = 1, 2, \dots$ 。记 $Z_n = N(I_n)$ 为 Ξ 在区间 I_n 上的点数。根据泊松流的定义:

$$Z_n \sim \text{Poisson}(\lambda |I_n|) = \text{Poisson}(\lambda)$$

由于 I_1, I_2, \dots 互不相交, 根据泊松流的独立增量性, 随机变量序列 Z_1, Z_2, \dots 相互独立。

对于某个确定的区间 I_n , 假设其包含的点数为 $Z_n = k$ 。在已知区间 I_n 内发生 k 次事件的条件下, 这 k 个事件的发生时刻在 I_n 上分布的条件密度恰好等于 k 个独立同分布于 $U(n-1, n)$ 的随机变量的次序统计量密度。

这 k 个点在空间上等价于独立且均匀分布在 I_n 上。我们将这些点记为 $U_{n,1}, \dots, U_{n,k}$, 则它们相互独立且服从 $U(n-1, n)$ 。

又由于泊松过程在不相交区间上的演化是相互独立的, 因此点的位置变量 U 与点数变量 Z 也是相互独立的。逆命题得证。

(4) 第一部分: 证明定理 2.1.12 (泊松流/泊松过程的合并)

(1) 泊松流的合并: 设 $B \subset \mathbb{R}_+$ 为任意有界区间, 其长度为 $|B|$ 。由于 Ξ 与 $\hat{\Xi}$ 是独立的泊松流, 它们在 B 内的点数分别服从独立的泊松分布, 即 $N_{\Xi}(B) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 |B|)$, $N_{\hat{\Xi}}(B) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 |B|)$ 。

由于连续时间内两个独立泊松流的点重合概率为 0 (几乎处处不重交), 合并后的流在 B 内的总点数为两者之和:

$$N_{\Xi \cup \hat{\Xi}}(B) = N_{\Xi}(B) + N_{\hat{\Xi}}(B)$$

根据独立泊松随机变量的可加性, 它们的和依然服从泊松分布, 且参数相加:

$$N_{\Xi \cup \hat{\Xi}}(B) \sim \text{Poisson}((\lambda_1 + \lambda_2) |B|)$$

对于不相交的区间组, 由于原泊松流在这些区间上的增量相互独立, 且两流之间也相互独立, 故合并后在不相交区间上的点数依然相互独立。这就证明了 $\Xi \cup \hat{\Xi}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松流。

(2) 泊松过程的合并: 已知 $Z_t = X_t + Y_t$, 我们逐一验证泊松过程的三个定义条件:

初始状态: $Z_0 = X_0 + Y_0 = 0 + 0 = 0$.

独立增量性: 对于任意 $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 增量 $Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}} = (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})$ 。因为 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 各自具有独立增量性, 且两者相互独立, 故这些加和构成的增量序列自然也是相互独立的。

平稳泊松增量: 对任意 $t, s \geq 0$, 增量 $Z_{t+s} - Z_t = (X_{t+s} - X_t) + (Y_{t+s} - Y_t)$ 。由于 $X_{t+s} - X_t \sim \text{Poisson}(\lambda_1 s)$ 且 $Y_{t+s} - Y_t \sim \text{Poisson}(\lambda_2 s)$ 且两者独立, 故:

$$Z_{t+s} - Z_t \sim \text{Poisson}((\lambda_1 + \lambda_2)s)$$

满足以上三条, $\{Z_t\}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。

第二部分: 证明定理 2.1.13 (泊松流的细分)

设 $B \subset \mathbb{R}_+$ 为任意有界区间, 原泊松流在 B 中的点数为 $N(B) \sim \text{Poisson}(\lambda|B|)$ 。记保留下来的点流 $\tilde{\Xi}$ 在 B 中的点数为 X , 被剔除的点流 $\hat{\Xi}$ 在 B 中的点数为 Y 。显然有 $X + Y = N(B)$ 。

由于每个点是以概率 p 独立保留, 以 $1 - p$ 剔除的, 所以在已知总点数 $N(B) = n$ 的条件下, X 服从二项分布, 即 $X | N(B) = n \sim B(n, p)$, 此时 $Y = n - X$ 。

我们来计算 $X = k$ 和 $Y = m$ 的联合概率 (此时必然有 $N(B) = k + m$):

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = m) &= P(X = k | N(B) = k + m)P(N(B) = k + m) \\ &= \left[\binom{k+m}{k} p^k (1-p)^m \right] \cdot \left[\frac{(\lambda|B|)^{k+m} e^{-\lambda|B|}}{(k+m)!} \right] \\ &= \frac{(k+m)!}{k!m!} p^k (1-p)^m \frac{(\lambda|B|)^k (\lambda|B|)^m e^{-\lambda|B|} e^{-\lambda(1-p)|B|}}{(k+m)!} \\ &= \left(\frac{(\lambda p|B|)^k e^{-\lambda p|B|}}{k!} \right) \cdot \left(\frac{(\lambda(1-p)|B|)^m e^{-\lambda(1-p)|B|}}{m!} \right) \end{aligned}$$

联合分布密度分解成了两个泊松分布概率质量函数的乘积, 因此 $X \sim \text{Poisson}(\lambda p|B|), Y \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p)|B|)$, 且 X 与 Y 在同一个区间 B 内的点数是相互独立的。

最后, 同理可证在不相交的区间上, 由于原泊松流具有独立增量性, 抽样过程又是对每个点独立进行的, 所以 $\tilde{\Xi}$ 和 $\hat{\Xi}$ 各自在不相交区间上的点数也是相互独立的。综上所述, $\tilde{\Xi}$ 和 $\hat{\Xi}$ 是两个相互独立的泊松流, 速率分别为 λp 与 $\lambda(1-p)$ 。 \square

9* 在例 2.1.15 中, 假设 ϕ_1 是离散型随机变量。证明: 推论 2.1.6 和 推论 2.1.8 对于复合泊松过程 $\{Y_t\}$ 也成立。

- **例 2.1.15 (复合泊松过程):** 假设 $\{X_t\}$ 是速率为 λ 的泊松过程, ϕ_1, ϕ_2, \dots 是独立同分布的随机变量序列, 且与 $\{X_t\}$ 独立。令

$$Y_t = \sum_{n=1}^{X_t} \phi_n,$$

则 $\{Y_t\}$ 被称为复合泊松过程。

- **推论 2.1.6:** 假设 $r \geq 1, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r$, 则对任意非负整数 k_1, \dots, k_r ,

$$P(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = k_i : i = 1, \dots, r) = \prod_{i=1}^r P(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = k_i).$$

Proof. 第一部分: 证明对于 $\{Y_t\}$, 推论 2.1.6 (独立增量性) 成立

假设 $r \geq 1, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r$ 。我们需要证明对任意离散取值 y_1, \dots, y_r , 有:

$$P(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}} = y_i : i = 1, \dots, r) = \prod_{i=1}^r P(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}} = y_i)$$

记泊松过程在第 i 个时间段的增量为 $\Delta X_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, 记复合泊松过程的增量为 $\Delta Y_i = Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}$ 。根据复合泊松过程的定义, 增量可以表示为:

$$\Delta Y_i = \sum_{n=X_{t_{i-1}}+1}^{X_{t_i}} \phi_n$$

由于 $\{X_t\}$ 具有独立增量性, $\Delta X_1, \dots, \Delta X_r$ 相互独立。利用全概率公式进行展开:

$$\begin{aligned} & P(\Delta Y_1 = y_1, \dots, \Delta Y_r = y_r) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_r \geq 0} P(\Delta Y_1 = y_1, \dots, \Delta Y_r = y_r \mid \Delta X_1 = k_1, \dots, \Delta X_r = k_r) P(\Delta X_1 = k_1, \dots, \Delta X_r = k_r) \end{aligned}$$

已知序列 $\{\phi_n\}$ 相互独立, 且与 $\{X_t\}$ 独立。当给定各个时间段内的事件发生次数 $\Delta X_i = k_i$ 时, 每个 ΔY_i 只是 k_i 个独立的 ϕ_n 的求和。由于累加的下标区间不重叠, 给定 ΔX_i 后, 各个 ΔY_i 是条件独立的。设 $S_k = \sum_{n=1}^k \phi_n$ (约定 $S_0 = 0$), 则上述条件概率可以拆解为:

$$P(\Delta Y_1 = y_1, \dots, \Delta Y_r = y_r \mid \Delta X_i = k_i, \forall i) = \prod_{i=1}^r P(S_{k_i} = y_i)$$

同时, 由 $\{X_t\}$ 的独立增量性有 $P(\Delta X_i = k_i, \forall i) = \prod_{i=1}^r P(\Delta X_i = k_i)$ 。将这两项代回全概率求和式, 并交换求和与乘积的顺序:

$$\begin{aligned} P(\Delta Y_1 = y_1, \dots, \Delta Y_r = y_r) &= \sum_{k_1, \dots, k_r \geq 0} \left(\prod_{i=1}^r P(S_{k_i} = y_i) P(\Delta X_i = k_i) \right) \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\sum_{k_i \geq 0} P(S_{k_i} = y_i) P(\Delta X_i = k_i) \right) \end{aligned}$$

而括号内的单项求和, 正是单个增量 ΔY_i 的全概率展开:

$$\sum_{k_i \geq 0} P(S_{k_i} = y_i) P(\Delta X_i = k_i) = P(\Delta Y_i = y_i)$$

因此得到:

$$P(\Delta Y_1 = y_1, \dots, \Delta Y_r = y_r) = \prod_{i=1}^r P(\Delta Y_i = y_i)$$

复合泊松过程的独立增量性得证。

第二部分: 证明对于 $\{Y_t\}$, 推论 2.1.8 (马氏性) 成立

设 $0 \leq t_1 < \dots < t_r < t < t + s$, 记历史状态为 $A = \{Y_{t_1} = y_1, \dots, Y_{t_r} = y_r, Y_t = y\}$ 。

将将来的状态写成增量形式 $Y_{t+s} = Y_t + (Y_{t+s} - Y_t)$ 。在给定 $Y_t = y$ 的条件下, 事件 $\{Y_{t+s} = z\}$ 等价于增量事件 $\{Y_{t+s} - Y_t = z - y\}$ 。同时, 历史事件 A 完全由 t 时刻之前的增量决定。由于 $\{Y_t\}$ 具有独立增量性, 未来的增量 $Y_{t+s} - Y_t$ 与 t 时刻之前的所有增量独立, 从而与历史事件 A 独立。因此:

$$\begin{aligned} P(Y_{t+s} = z \mid Y_{t_1} = y_1, \dots, Y_{t_r} = y_r, Y_t = y) &= P(Y_{t+s} - Y_t = z - y \mid A) \\ &= P(Y_{t+s} - Y_t = z - y) \end{aligned}$$

同理, 若条件只给定现在时刻 $Y_t = y$, 同样有:

$$P(Y_{t+s} = z \mid Y_t = y) = P(Y_{t+s} - Y_t = z - y \mid Y_t = y) = P(Y_{t+s} - Y_t = z - y)$$

因此:

$$P(Y_{t+s} = z \mid Y_{t_1} = y_1, \dots, Y_{t_r} = y_r, Y_t = y) = P(Y_{t+s} = z \mid Y_t = y)$$

此外, 由于 $\{X_t\}$ 具有平稳增量性 ($X_{t+s} - X_t \sim X_s - X_0$), 且 ϕ_n 是独立同分布的, 所以复合增量 $Y_{t+s} - Y_t$ 的分布也仅与时间差 s 有关, 即:

$$P(Y_{t+s} - Y_t = z - y) = P(Y_s = z - y)$$

故对于 $\{Y_t\}$, 推论 2.1.8 的等式完全成立。□

10*. 证明 **命题 2.1.18:** 假设计数过程 $\{X_t\}$ 是独立增量过程。若对任意 $t \geq 0$,

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{P(X_{t+s} - X_t \neq 0)}{s} = \lim_{s \searrow 0} \frac{P(X_{t+s} - X_t = 1)}{s} = \lambda,$$

则 $\{X_t\}$ 是速率为 λ 的泊松过程。

Proof. 对任意 $t \geq 0$, 当 $h \searrow 0$ 时, 可以将概率展开为 h 的函数:

$$P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X_{t+h} - X_t \neq 0) = \lambda h + o(h)$$

由此可知, 在极短时间 h 内发生 2 次及以上事件的概率为高阶无穷小:

$$P(X_{t+h} - X_t \geq 2) = P(X_{t+h} - X_t \neq 0) - P(X_{t+h} - X_t = 1) = o(h)$$

从而, 在这段时间内完全没有发生事件的概率为:

$$P(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - P(X_{t+h} - X_t \neq 0) = 1 - \lambda h - o(h)$$

要证 $\{X_t\}$ 是速率为 λ 的泊松过程, 已知独立增量性, 只需证其具有平稳泊松增量。

固定 $t \geq 0$, 记 $P_n(s) = P(X_{t+s} - X_t = n)$ 。根据计数过程的性质, 初值 $P_0(0) = 1$, 且所有 $n \geq 1$ 有 $P_n(0) = 0$ 。利用独立增量性, 考察时间在 s 基础上再前进一微小增量 $h > 0$ 。根据全概率公式:

$$P_0(s+h) = P(X_{t+s+h} - X_t = 0) = P(X_{t+s} - X_t = 0)P(X_{t+s+h} - X_{t+s} = 0)$$

代入前面的无穷小展开式:

$$P_0(s+h) = P_0(s)(1 - \lambda h - o(h))$$

移项并除以 h , 取极限 $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\lambda P_0(s) \implies P_0'(s) = -\lambda P_0(s)$$

结合初值 $P_0(0) = 1$, 解常微分方程得:

$$P_0(s) = e^{-\lambda s}$$

对于 $n \geq 1$, 同样利用独立增量性和全概率公式进行状态转移的单步分解:

$$\begin{aligned} P_n(s+h) &= \sum_{k=0}^n P(X_{t+s} - X_t = k)P(X_{t+s+h} - X_{t+s} = n-k) \\ &= P_n(s)P(X_{t+s+h} - X_{t+s} = 0) + P_{n-1}(s)P(X_{t+s+h} - X_{t+s} = 1) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(s)P(X_{t+s+h} - X_{t+s} = n-k) \end{aligned}$$

因为最后一个求和项要求在 h 时间内的增量 ≥ 2 , 其概率总和受限于 $o(h)$, 故可写为:

$$P_n(s+h) = P_n(s)(1 - \lambda h - o(h)) + P_{n-1}(s)(\lambda h + o(h)) + o(h)$$

移项、除以 h 并取极限 $h \rightarrow 0$, 得到递推微分方程系统:

$$P_n'(s) = -\lambda P_n(s) + \lambda P_{n-1}(s)$$

将该微分方程变形为一阶线性常微分方程的标准形式: $P_n'(s) + \lambda P_n(s) = \lambda P_{n-1}(s)$ 。两边同乘积分因子 $e^{\lambda s}$, 利用乘积求导法则, 可化简为:

$$\frac{d}{ds} (e^{\lambda s} P_n(s)) = \lambda e^{\lambda s} P_{n-1}(s)$$

利用数学归纳法求解。当 $n = 1$ 时, 代入已求得的 $P_0(s) = e^{-\lambda s}$:

$$\frac{d}{ds} (e^{\lambda s} P_1(s)) = \lambda e^{\lambda s} e^{-\lambda s} = \lambda$$

两边从 0 到 s 积分, 代入 $P_1(0) = 0$, 得 $e^{\lambda s} P_1(s) = \lambda s \implies P_1(s) = \lambda s e^{-\lambda s}$ 。

假设 $n-1$ 时, $P_{n-1}(s) = \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s}$ 。代入微分方程:

$$\frac{d}{ds} (e^{\lambda s} P_n(s)) = \lambda e^{\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} = \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!}$$

两边从 0 到 s 积分:

$$e^{\lambda s} P_n(s) - 0 = \int_0^s \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} du = \frac{\lambda^n s^n}{n!}$$

移项即得:

$$P_n(s) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}$$

因此, 对任意 $t \geq 0$ 和 $s > 0$, 增量 $X_{t+s} - X_t$ 服从参数为 λs 的泊松分布, 且分布只依赖于时间差 s , 与起点 t 无关。

由于 $\{X_t\}$ 具有平稳的泊松增量, 且已知其为独立增量过程, $\{X_t\}$ 是速率为 λ 的泊松过程。 \square

2.2 跳过程的定义及其转移概率

1. 三人在同一办公室相互独立地工作，各有一部电话。第 i 个人每次打电话的时长服从指数分布，参数为 μ_i ；放下电话到下一次开始打电话之间的间隔时长也服从指数分布，参数为 λ_i 。假设以上所有时长均相互独立。试用跳过程刻画该办公室内的工作状况。(注：即写出状态空间和转移速率矩阵。)

Proof. 对于第 i 个人 ($i = 1, 2, 3$)，定义其在 t 时刻的状态指示变量 $X_i(t)$ ：

- $X_i(t) = 0$ 表示第 i 个人在 t 时刻处于空闲（放下电话）状态；
- $X_i(t) = 1$ 表示第 i 个人在 t 时刻处于通话状态。

系统的整体状态可以用一个三维向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 来刻画。因此，该跳过程的状态空间 S 为所有可能的三维 0-1 向量的集合：

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3\} = \{0, 1\}^3$$

状态空间的大小为 $|S| = 2^3 = 8$ 。

由于三人打电话的时长和间隔时长均服从指数分布且相互独立，在极短的时间段 dt 内，两个人同时改变状态的概率为 $o(dt)$ 。因此，系统每次只能发生一个人的状态跳跃。

设系统当前状态为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S$ 。引入标准基向量 $e_1 = (1, 0, 0)$ ， $e_2 = (0, 1, 0)$ ， $e_3 = (0, 0, 1)$ 。转移速率矩阵的非对角线元素 $q_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ 仅在目标状态 \mathbf{y} 与当前状态 \mathbf{x} 只有一位不同（即发生且仅发生一个事件）时严格大于 0，具体如下：

对于 $i = 1, 2, 3$ ：

- 若 $x_i = 0$ （第 i 个人空闲），他开始打电话的速率为 λ_i 。此时系统状态从 \mathbf{x} 转移到 $\mathbf{x} + e_i$ ：

$$q_{\mathbf{x}, \mathbf{x} + e_i} = \lambda_i$$

- 若 $x_i = 1$ （第 i 个人在通话），他挂断电话的速率为 μ_i 。此时系统状态从 \mathbf{x} 转移到 $\mathbf{x} - e_i$ ：

$$q_{\mathbf{x}, \mathbf{x} - e_i} = \mu_i$$

对于任何其他相差超过一个分量的状态 \mathbf{y} ，转移速率为：

$$q_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = 0$$

最后，对角线元素等于离开当前状态的所有转移速率之和的相反数：

$$q_{\mathbf{x}, \mathbf{x}} = - \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} q_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = - \sum_{i=1}^3 (\lambda_i \mathbf{1}_{\{x_i=0\}} + \mu_i \mathbf{1}_{\{x_i=1\}})$$

□

2. 假设某投诉处共有 s 位人工客服，每位客服有一台座机，接一个电话的时长服从 $\text{Exp}(\alpha)$ 。假设投诉电话的拨入时刻是泊松流，参数为 λ ；当 s 台座机全都在通话时，新拨入的投诉电话无法接通并立刻挂断（即不等待）。试用跳过程刻画该投诉处正在工作的人工客服数目。

Proof. 该系统可以用一个具有有限状态空间的生灭过程来刻画。

令 $X(t)$ 表示时刻 t 正在工作的人工客服数目。由于系统共有 s 位客服且不设等待区，状态空间 S 为：

$$S = \{0, 1, 2, \dots, s\}$$

根据泊松流的性质和指数分布的无记忆性，我们可以得到非对角线上的转移速率 $q_{i,j}$ ：

- **迁入速率（到达速率）：**只要系统未滿 ($i < s$)，新电话拨入就会使工作人数增加 1。

$$q_{i, i+1} = \lambda, \quad 0 \leq i < s$$

当 $i = s$ 时，新拨入的电话无法接通并挂断，状态不再增加。

- **迁出速率（服务完成速率）：**当有 i 位客服正在工作时，每位客服独立以速率 α 完成服务。根据指数分布的性质，系统总的服务完成速率（即状态由 i 降至 $i - 1$ 的速率）为 i 个独立速率之和：

$$q_{i, i-1} = i\alpha, \quad 1 \leq i \leq s$$

对于其他 $|j - i| > 1$ 的情况, $q_{i,j} = 0$ 。
 矩阵 $Q = (q_{i,j})_{i,j \in S}$ 的元素定义如下:

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1, 0 \leq i < s \\ i\alpha, & j = i - 1, 1 \leq i \leq s \\ -(\lambda + i\alpha), & j = i, 0 \leq i < s \\ -s\alpha, & j = i, i = s \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

□

3. (点灯模型) 在 \mathbb{Z} 的每个顶点放置一盏灯, 每盏灯有“亮”和“灭”两个状态, 初始时刻所有灯都是灭的。某“点灯人”在 \mathbb{Z} 上进行连续时间的简单随机游动, 即下一步只能跳至邻居, 往左和往右跳跃的速率都是 $1/2$ 。假设点灯人初始时刻位于原点, 每跳跃一次就会改变目的地的灯的亮或灭状态。试用跳过程描述此系统。

Proof. 记 $Y(t) \in \mathbb{Z}$ 为时刻 t 点灯人所在的顶点位置。记 $\eta(t)$ 为时刻 t 所有灯的状态配置, 可以视为从 \mathbb{Z} 映射到 $\{0, 1\}$ 的函数: 对任意 $x \in \mathbb{Z}$, $\eta_x(t) \in \{0, 1\}$ 。其中 0 表示灯“灭”, 1 表示灯“亮”。

由于初始时刻所有的灯都是灭的 (即 $\eta_x(0) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$), 且在任意有限时间 t 内, 点灯人只能跳跃有限次, 所以状态配置 $\eta(t)$ 中只有有限个分量为 1。我们记所有仅含有限个 1 的配置空间为 $\Sigma = \{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta_x < \infty\}$ 。

因此, 该系统的整体状态空间为点灯人位置与灯配置的直积:

$$S = \mathbb{Z} \times \Sigma$$

系统在任一时刻的状态可以表示为一个二元组 $\mathbf{x} = (y, \eta) \in S$ 。

假设系统当前处于状态 $\mathbf{x} = (y, \eta)$ 。点灯人下一步只能跳向 $y - 1$ 或 $y + 1$, 且跳跃到达新位置时, 会同时改变新位置处的灯的状态。

为了方便表达, 定义状态翻转操作: 对任意给定的配置 $\eta \in \Sigma$ 和目标位置 $z \in \mathbb{Z}$, 定义翻转 z 处状态后的新配置为 $\eta^{(z)}$, 使得:

$$\eta_x^{(z)} = \begin{cases} 1 - \eta_x, & x = z \\ \eta_x, & x \neq z \end{cases}$$

根据题意, 点灯人向左和向右跳跃的速率均为 $1/2$ 。这对应着系统发生如下状态转移:

- **向右跳跃并点灯/灭灯:** 点灯人从 y 跳至 $y + 1$, 同时 $y + 1$ 处的灯状态翻转。转移速率为:

$$q_{(y,\eta), (y+1,\eta^{(y+1)})} = \frac{1}{2}$$

- **向左跳跃并点灯/灭灯:** 点灯人从 y 跳至 $y - 1$, 同时 $y - 1$ 处的灯状态翻转。转移速率为:

$$q_{(y,\eta), (y-1,\eta^{(y-1)})} = \frac{1}{2}$$

对于任何其他无法通过单步跳跃达到的状态 $\mathbf{y} \in S$ (即 $|y' - y| \neq 1$, 或者灯的状态变化不符合上述规则), 转移速率为 0:

$$q_{(y,\eta), \mathbf{y}} = 0$$

对角线元素 (离开当前状态的总速率的相反数) 为:

$$q_{(y,\eta), (y,\eta)} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1$$

□

4. 假设 $\{X_t\}$ 与 $\{Y_t\}$ 是相互独立的泊松过程, 速率分别为 λ 和 μ , $X_0 = Y_0 = 0$ 。对任意 $t \geq 0$, 令 $Z_t = (X_t, Y_t)$ 。

- (1) 写出 $\{Z_t\}$ 的状态空间和转移速率。
- (2) 对任意非负整数 m, n , 求 $P(\exists t \geq 0, \text{使得 } Z_t = (m, n))$ 。

Proof. (1) **状态空间:** 由于 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 都是从 0 出发的泊松过程, 它们的状态空间均为非负整数集 \mathbb{Z}_+ 。因此, 联合过程 $Z_t = (X_t, Y_t)$ 的状态空间为其直积:

$$S = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{Z}_+\}$$

转移速率: 因为 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是相互独立的连续时间泊松过程, 它们在极短时间 dt 内同时发生跳跃的概率为 $o(dt)$, 可以忽略不计。这意味着系统每次只能在一个维度上发生步长为 1 的增加。设系统当前状态为 $(i, j) \in S$, 其非零的转移速率如下:

- 仅 X_t 发生一次跳跃 (向右走一步), 速率等于 $\{X_t\}$ 的速率:

$$q_{(i,j),(i+1,j)} = \lambda$$

- 仅 Y_t 发生一次跳跃 (向上走一步), 速率等于 $\{Y_t\}$ 的速率:

$$q_{(i,j),(i,j+1)} = \mu$$

离开状态 (i, j) 的总速率为 $q_i = \lambda + \mu$ 。因此对角线元素为:

$$q_{(i,j),(i,j)} = -(\lambda + \mu)$$

对于其他任何状态 (k, l) , 转移速率均为 0。

(2) 由于泊松过程的轨道是单调不减的, 要使系统在某个时刻达到状态 (m, n) , 系统必须在总共发生 $m + n$ 次跳跃时, 恰好有 m 次是 X 方向的跳跃, 有 n 次是 Y 方向的跳跃。

考察该跳过程的嵌入离散时间马氏链。在每次系统发生跳跃时, 它向 X 方向和向 Y 方向跳跃的概率是相互竞争的指数分布决定的。根据指数分布的性质, 某次跳跃是 X 方向跳跃的概率为:

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

某次跳跃是 Y 方向跳跃的概率为:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

由于增量的平稳独立性, 序列中每次跳跃的方向构成独立同分布的伯努利试验。

因此过程能够到达 (m, n) 的概率为:

$$\begin{aligned} P(\exists t \geq 0, \text{使得 } Z_t = (m, n)) &= \binom{m+n}{m} p^m q^n \\ &= \binom{m+n}{m} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^m \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \end{aligned}$$

□

5. 假设 G 为有 n 个顶点的完全图, X_t 为 G 上的接触过程在时刻 t 被感染的个体数目。

- (1) 写出 $\{X_t\}$ 的状态空间和转移速率。
- (2) 对跳过程 $\{X_t\}$, 求 $E_1 \tau_N$ 。

Proof. (1) 已知完全图 G 有 n 个顶点。设个体的感染速率为 λ , 恢复速率为 1。状态空间 S 表示被感染的个体数目:

$$S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- **感染** ($k \rightarrow k+1$): 当系统中有 k 个感染者时, 共有 $n-k$ 个健康者。每对“感染者-健康者”之间都有接触, 共有 $k(n-k)$ 对接触。因此, 系统增加一个感染者的总速率为 $\lambda k(n-k)$ 。
- **恢复** ($k \rightarrow k-1$): 当系统中有 k 个感染者时, 每个感染者以独立速率 1 恢复, 故系统减少一个感染者的总速率为 k 。

综上, 系统的转移速率为:

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda i(n-i), & j = i+1, 1 \leq i \leq n-1 \\ i, & j = i-1, 1 \leq i \leq n \\ 0, & \text{其他 } j \neq i \end{cases}$$

(2) 根据模型的具体定义，需要分情况讨论：

根据转移速率可知 $q_{0,1} = 0$ ，因此状态 0 是一个吸收态。对于任意 $n \geq 2$ ，当系统从状态 1 出发时，由于恢复速率大于 0，存在严格大于 0 的概率在到达状态 n 之前先掉入状态 0（即疾病彻底灭绝）。一旦系统进入状态 0，就永远无法再离开，此时到达状态 n 的时间变为无穷大。因此首达时间的无条件数学期望必然发散：

$$E_1 \tau_n = \infty$$

□

6. 中国象棋的棋盘上有一只“相”在做连续时间参数的简单随机游动：它的跳跃时刻是速率为 1 的泊松流，每次跳跃时，目的地在规则允许它跳到的范围中等概率地选择。假设这只“相”最初位于图 2.5 中的 ♣ 处。试问：它平均需要多少时间跳到 ♠ 处？

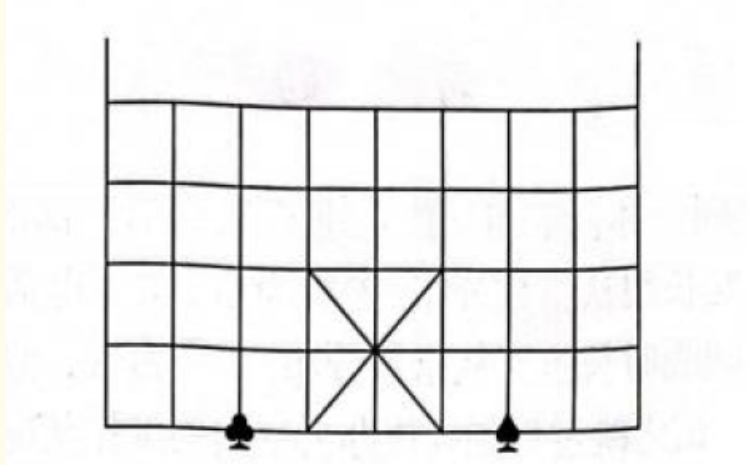


图 2.5 象棋棋盘

Proof. 为了计算期望到达时间，我们先为“相”在半个棋盘上所有可能到达的位置进行状态编号。根据“相走田”且不能过河的规则，共有 7 个合法位置。设起点 ♣ 所在位置为状态 A ，终点 ♠ 所在位置为状态 B 。根据棋盘结构，我们定义其他 5 个状态如下：

- C : 左侧边缘位置 (A 的左上方)
- E : 左上方位置 (C 的右上方, A 的正上方)
- G : 棋盘中心位置 (A 的右上方, B 的左上方)
- D : 右侧边缘位置 (B 的右上方)
- F : 右上方位置 (D 的左上方, B 的正上方)

根据“等概率选择目的地”的规则，各状态的度数（可跳跃的目的地数量）及转移概率如下：

- 从 A (度为 2) 只能跳至 C, G ，概率各为 $1/2$ ；
- 从 C (度为 2) 只能跳至 A, E ，概率各为 $1/2$ ；
- 从 E (度为 2) 只能跳至 C, G ，概率各为 $1/2$ ；
- 从 G (度为 4) 可跳至 A, B, E, F ，概率各为 $1/4$ ；
- 从 F (度为 2) 只能跳至 D, G ，概率各为 $1/2$ ；
- 从 D (度为 2) 只能跳至 B, F ，概率各为 $1/2$ 。

由于我们要求首达 B 的时间，将 B 视作吸收态，期望时间为 0。

记 m_i 为从状态 i 出发到达终点 B 的期望时间（因为泊松流速率为 1，期望时间等同于期望跳跃步数）。首步分析法建立如下线性方程组：

$$\begin{aligned} m_A &= 1 + \frac{1}{2}m_C + \frac{1}{2}m_G \\ m_C &= 1 + \frac{1}{2}m_A + \frac{1}{2}m_E \\ m_E &= 1 + \frac{1}{2}m_C + \frac{1}{2}m_G \\ m_G &= 1 + \frac{1}{4}m_A + \frac{1}{4}m_B + \frac{1}{4}m_E + \frac{1}{4}m_F \\ m_F &= 1 + \frac{1}{2}m_D + \frac{1}{2}m_G \\ m_D &= 1 + \frac{1}{2}m_B + \frac{1}{2}m_F \\ m_B &= 0 \end{aligned}$$

为了简化计算，我们利用棋盘的拓扑对称性来求解这个方程组：

1. 观察 m_A 和 m_E 的方程，它们的结构完全相同，因此必然有 $m_A = m_E$ 。
2. 将 $m_A = m_E$ 代入 m_C 的方程中：

$$m_C = 1 + \frac{1}{2}m_A + \frac{1}{2}m_A = 1 + m_A$$

3. 将 m_C 的表达式代回 m_A 的方程：

$$m_A = 1 + \frac{1}{2}(1 + m_A) + \frac{1}{2}m_G = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}m_A + \frac{1}{2}m_G$$

移项化简得： $\frac{1}{2}m_A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}m_G \implies m_A = 3 + m_G$ 。

4. 现在处理右半区（ D 和 F ）。将 $m_B = 0$ 代入 m_D 的方程：

$$m_D = 1 + \frac{1}{2}m_F$$

5. 将其代入 m_F 的方程：

$$m_F = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}m_F\right) + \frac{1}{2}m_G = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}m_F + \frac{1}{2}m_G$$

移项化简得： $\frac{3}{4}m_F = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}m_G \implies m_F = 2 + \frac{2}{3}m_G$ 。

6. 最后，将上述所有由 m_G 表达的结果统统代入中心节点 G 的方程：

$$\begin{aligned} m_G &= 1 + \frac{1}{4}m_A + 0 + \frac{1}{4}m_E + \frac{1}{4}m_F \\ &= 1 + \frac{1}{2}m_A + \frac{1}{4}m_F \quad (\text{因为 } m_A = m_E) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(3 + m_G) + \frac{1}{4}\left(2 + \frac{2}{3}m_G\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}m_G + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}m_G \\ &= 3 + \frac{2}{3}m_G \end{aligned}$$

7. 解此关于 m_G 的方程：

$$\frac{1}{3}m_G = 3 \implies m_G = 9$$

8. 最终求得起点 ♣（状态 A ）的期望时间：

$$m_A = 3 + m_G = 3 + 9 = 12$$

□

7. 假设 $\{X_t\}$ 是例 2.2.17 中的两状态跳过程。对任意 $t > 0$, 求 $P(X_t = 1 | X_0 = X_{3t} = 0)$ 与 $P(X_t = 1 | X_0 = X_{3t} = 0, X_{4t} = 1)$ 。

例 2.2.17 (两状态跳过程): 假设状态空间 $S = \{0, 1\}$, 转移速率为 $q_{01} = \lambda, q_{10} = \mu$ 。根据柯尔莫戈罗夫后退方程, 可解得其转移概率矩阵的各项为:

$$p_{00}(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t}}{\mu + \lambda}, \quad p_{01}(t) = \frac{\lambda - \lambda e^{-(\mu+\lambda)t}}{\mu + \lambda},$$

$$p_{11}(t) = \frac{\lambda + \mu e^{-(\mu+\lambda)t}}{\mu + \lambda}, \quad p_{10}(t) = \frac{\mu - \mu e^{-(\mu+\lambda)t}}{\mu + \lambda}.$$

Proof. 简记 $r = \mu + \lambda$ 。

根据条件概率的定义以及马氏性, 在已知 $X_0 = 0$ 的条件下, 联合概率可以拆解为平稳转移概率的乘积:

$$\begin{aligned} P(X_t = 1 | X_0 = X_{3t} = 0) &= \frac{P(X_0 = 0, X_t = 1, X_{3t} = 0)}{P(X_0 = 0, X_{3t} = 0)} \\ &= \frac{P(X_0 = 0)P(X_t = 1 | X_0 = 0)P(X_{3t} = 0 | X_t = 1)}{P(X_0 = 0)P(X_{3t} = 0 | X_0 = 0)} \\ &= \frac{p_{01}(t)p_{10}(2t)}{p_{00}(3t)} \end{aligned}$$

代入转移概率公式并化简:

$$\begin{aligned} \frac{p_{01}(t)p_{10}(2t)}{p_{00}(3t)} &= \frac{\frac{\lambda(1-e^{-rt})}{r} \cdot \frac{\mu(1-e^{-2rt})}{r}}{\frac{\mu + \lambda e^{-3rt}}{r}} \\ &= \frac{\lambda\mu(1-e^{-rt})(1-e^{-2rt})}{r(\mu + \lambda e^{-3rt})} \\ &= \frac{\lambda\mu(1-e^{-(\mu+\lambda)t})(1-e^{-2(\mu+\lambda)t})}{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda e^{-3(\mu+\lambda)t})} \end{aligned}$$

由于 $\{X_t\}$ 是马尔可夫链, 它满足条件独立性: 在已知现在状态的条件下, 过去的状态与未来的状态条件独立。

$$\begin{aligned} P(X_t = 1 | X_0 = 0, X_{3t} = 0, X_{4t} = 1) &= \frac{P(X_0 = 0, X_t = 1, X_{3t} = 0, X_{4t} = 1)}{P(X_0 = 0, X_{3t} = 0, X_{4t} = 1)} \\ &= \frac{P(X_0 = 0)p_{01}(t)p_{10}(2t)p_{01}(t)}{P(X_0 = 0)p_{00}(3t)p_{01}(t)} \\ &= \frac{p_{01}(t)p_{10}(2t)}{p_{00}(3t)} \end{aligned}$$

第二问的结果与第一问完全相同:

$$P(X_t = 1 | X_0 = 0, X_{3t} = 0, X_{4t} = 1) = \frac{\lambda\mu(1-e^{-(\mu+\lambda)t})(1-e^{-2(\mu+\lambda)t})}{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda e^{-3(\mu+\lambda)t})}$$

□

8. 假设 $\{X_t\}$ 是从 1 出发的 Yule 过程。

(1) 对任意 $t > 0$, 求 X_t 的分布列。

(2) 证明: 在 $(0, t]$ 上共跳跃 n 次的条件下, 跳跃时刻为 n 个独立同分布的随机变量 U_1, \dots, U_n 的顺序统计量。并试求 U_1 的分布。

例 2.2.8 (Yule 过程): 取出生速率为 $\lambda_i = \lambda i$ ($i = 1, 2, \dots$) 的纯生过程被称为 Yule 过程。其直观物理含义为: 系统中每个细胞独立地被一个速率为 λ 的指数闹钟控制, 闹钟响起时细胞一分为二。

Proof. (1) 已知 $\{X_t\}$ 是从 1 出发的 Yule 过程, 状态空间为 $S = \{1, 2, \dots\}$ 。根据 Yule 过程的定义, 系统处于状态 i 时向 $i+1$ 转移的速率为 $q_{i,i+1} = \lambda i$, 离开状态 i 的总速率的相反数为 $q_{i,i} = -\lambda i$ 。记 $P_n(t) = P(X_t = n)$, 由于 $X_0 = 1$, 初值条件为 $P_1(0) = 1$, 且对 $n \geq 2$ 有 $P_n(0) = 0$ 。

根据 Kolmogorov Forward Equations $P'(t) = P(t)Q$, 我们有:

$$\begin{aligned} P_1'(t) &= -\lambda P_1(t) \\ P_n'(t) &= -\lambda n P_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

由第一个方程和初值条件, 解得:

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}$$

对于 $n \geq 2$, 将微分方程写为一阶线性常微分方程的标准形式:

$$P_n'(t) + \lambda n P_n(t) = \lambda(n-1)P_{n-1}(t)$$

两边同乘积分因子 $e^{\lambda n t}$:

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda n t} P_n(t)) = \lambda(n-1)e^{\lambda n t} P_{n-1}(t)$$

通过数学归纳法, 依次解得:

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}, \quad n \geq 1$$

不难验证 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = 1$, 满足归一性。这表明 X_t 服从参数为 $p = e^{-\lambda t}$ 的几何分布。

(2) 在 $(0, t]$ 上共跳跃 n 次, 等价于在时刻 t 系统处于状态 $n+1$, 即事件 $\{X_t = n+1\}$ 。设前 n 次跳跃的时刻依次为 T_1, T_2, \dots, T_n , 且约定 $T_0 = 0$ 。

系统在状态 k 的逗留时间为 $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, 由于是 Yule 过程, $\tau_k \sim \text{Exp}(\lambda k)$ 且相互独立。要满足跳跃 n 次的条件, 必须有 $0 < T_1 < \dots < T_n \leq t < T_{n+1}$ 。

我们先写出跳跃时刻 T_1, \dots, T_n 与事件 $\{X_t = n+1\}$ 的联合密度函数(即 $T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n$ 且 $\tau_{n+1} > t - t_n$):

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n, X_t = n+1) &= \left(\prod_{k=1}^n \lambda k e^{-\lambda k(t_k - t_{k-1})} \right) \cdot P(\tau_{n+1} > t - t_n) \\ &= \lambda^n n! \exp \left\{ -\lambda \sum_{k=1}^n k(t_k - t_{k-1}) - \lambda(n+1)(t - t_n) \right\} \end{aligned}$$

观察指数部分的求和项, 进行展开:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n k(t_k - t_{k-1}) + (n+1)(t - t_n) \\ &= (t_1 - 0) + 2(t_2 - t_1) + 3(t_3 - t_2) + \dots + n(t_n - t_{n-1}) + (n+1)t - (n+1)t_n \\ &= -t_1 - t_2 - t_3 - \dots - t_n + (n+1)t \end{aligned}$$

代入原式, 联合密度化简为:

$$f(t_1, \dots, t_n, X_t = n+1) = \lambda^n n! \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n t_i - \lambda(n+1)t \right\}$$

接下来, 求给定 $\{X_t = n+1\}$ 条件下的条件密度函数:

$$\begin{aligned} f_{T_1, \dots, T_n | X_t = n+1}(t_1, \dots, t_n) &= \frac{f(t_1, \dots, t_n, X_t = n+1)}{P(X_t = n+1)} \\ &= \frac{\lambda^n n! e^{\lambda \sum_{i=1}^n t_i} e^{-\lambda(n+1)t}}{e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^n} \\ &= n! \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda e^{-\lambda(t-t_i)}}{1 - e^{-\lambda t}} \right] \cdot \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n < t\}} \end{aligned}$$

观察上述条件密度的形式, 它恰好等于 n 个独立同分布的随机变量 U_1, \dots, U_n 的顺序统计量密度 (即 $n! \prod h(t_i)$)。由此可得 U_1 的概率密度函数为:

$$h(u) = \frac{\lambda e^{-\lambda(t-u)}}{1 - e^{-\lambda t}}, \quad 0 < u < t$$

这表明 U_1 在 $(0, t]$ 上服从一个被截断的时间反转的指数分布。 □

9. 写出关于泊松过程的转移速率矩阵、柯尔莫戈罗夫前进方程和后退方程, 并分别用它们求出 $p_{ij}(t)$ 。

Proof. 已知泊松过程 $\{X_t\}$ 具有平稳独立增量, 设其速率为 $\lambda > 0$ 。状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。

1. 转移速率矩阵 \mathbf{Q}

泊松过程在极短时间 dt 内只能发生一次事件 (状态加 1), 因此非对角线转移速率为:

$$q_{i,i+1} = \lambda, \quad i \in S$$

对于其他 $j \neq i, i+1$, 有 $q_{ij} = 0$ 。对角线元素等于离开该状态的总速率的相反数:

$$q_{ii} = -q_{i,i+1} = -\lambda, \quad i \in S$$

故转移速率矩阵 $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ 的具体形式为:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1 \\ -\lambda, & j = i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

2. 柯尔莫戈罗夫前进方程

前进方程的矩阵形式为 $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ 。将其写成分量形式:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)q_{kj}$$

代入 \mathbf{Q} 的元素, 由于状态只能单向增加, 必然有 $j \geq i$ 。当 $j = i$ 时:

$$p'_{ii}(t) = -\lambda p_{ii}(t)$$

当 $j > i$ 时:

$$p'_{ij}(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i,j-1}(t)$$

初始条件为: $p_{ii}(0) = 1$, 且对于 $j > i$ 有 $p_{ij}(0) = 0$ 。

用前进方程求 $p_{ij}(t)$: 由 $p'_{ii}(t) = -\lambda p_{ii}(t)$ 及初值 $p_{ii}(0) = 1$, 解得一阶常微分方程:

$$p_{ii}(t) = e^{-\lambda t}$$

对于 $j > i$, 将方程写为标准形式: $p'_{ij}(t) + \lambda p_{ij}(t) = \lambda p_{i,j-1}(t)$ 。两边同乘积分因子 $e^{\lambda t}$:

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} p_{ij}(t)) = \lambda e^{\lambda t} p_{i,j-1}(t)$$

利用数学归纳法。当 $j = i + 1$ 时:

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} p_{i,i+1}(t)) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda \implies e^{\lambda t} p_{i,i+1}(t) = \lambda t \implies p_{i,i+1}(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

假设对于 $j = i + n - 1$ 有 $p_{i,i+n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$, 代入递推式积分即可得到:

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \quad j \geq i$$

3. 柯尔莫戈罗夫后退方程

后退方程的矩阵形式为 $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ 。将其写成分量形式:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t)$$

代入 \mathbf{Q} 的元素:

$$p'_{ij}(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t), \quad j \geq i$$

(注意: 这里递推的是下标 i , 而前进方程递推的是下标 j)。

用后退方程求 $p_{ij}(t)$: 为了解这个方程, 我们固定目标状态 j , 从 $i = j$ 开始倒推求解。当 $i = j$ 时, 状态不能减少, 故 $p_{j+1,j}(t) \equiv 0$ 。方程退化为:

$$p'_{jj}(t) = -\lambda p_{jj}(t) \implies p_{jj}(t) = e^{-\lambda t}$$

当 $i = j - 1$ 时, 代入已求出的 $p_{jj}(t)$:

$$p'_{j-1,j}(t) + \lambda p_{j-1,j}(t) = \lambda p_{jj}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

同乘积分因子 $e^{\lambda t}$:

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} p_{j-1,j}(t)) = \lambda \implies e^{\lambda t} p_{j-1,j}(t) = \lambda t \implies p_{j-1,j}(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

以此类推, 设 $n = j - i$, 可得:

$$p_{i,i+n}(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

即:

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \quad j \geq i$$

□

10. 假设 S 有限。

- (1) 验证: $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}$ 满足柯尔莫戈罗夫后退方程以及初值条件 $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, 其中 $e^{t\mathbf{Q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n$ 。
- (2) 证明: 对任意 $t \geq 0$, 转移矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 的行列式为严格正。

Proof. (1) 将 $t = 0$ 代入矩阵指数的幂级数定义式:

$$\mathbf{P}(0) = e^{0 \cdot \mathbf{Q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} \mathbf{Q}^n$$

在幂级数展开中, 规定 $0^0 = 1$ 且 $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$ 。对于所有 $n \geq 1$ 的项, 由于包含 0^n 因式, 其值均为零矩阵 $\mathbf{0}$ 。因此, 级数中仅有 $n = 0$ 的首项非零:

$$\mathbf{P}(0) = \frac{1}{0!} \mathbf{I} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots = \mathbf{I}$$

由于状态空间 S 是有限的, \mathbf{Q} 是一个有限维方阵。根据矩阵分析的结论, 矩阵指数幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n$ 在整个实轴上绝对且一致收敛, 因此我们可以对其进行逐项求导。

对 $\mathbf{P}(t)$ 关于时间 t 求导:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} \mathbf{Q}^n \quad (\text{常数项 } \mathbf{I} \text{ 的导数为 } \mathbf{0}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{Q}^n \end{aligned}$$

为了构造后退方程的形式 $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$, 我们从级数中向左提取出一个 \mathbf{Q} :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{Q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{Q}^{n-1} \right)$$

令下标 $m = n - 1$, 当 n 从 1 到 ∞ 时, m 从 0 到 ∞ 。代换变量后得到:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{Q} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \mathbf{Q}^m \right) \\ &= \mathbf{Q} e^{t\mathbf{Q}} \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{P}(t) \end{aligned}$$

同理, 若向右提取 \mathbf{Q} , 则可证明其满足前进方程 $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ 。

(2) 由于 S 有限, 我们可以直接使用矩阵指数的刘维尔定理: 对于任意有限维方阵 \mathbf{A} , 其矩阵指数的行列式等于其迹 (主对角线元素之和) 的标量指数。即:

$$\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\text{tr}(\mathbf{A})}$$

将 $\mathbf{A} = t\mathbf{Q}$ 代入该公式, 可得转移矩阵的行列式为:

$$\det(\mathbf{P}(t)) = \det(e^{t\mathbf{Q}}) = e^{\text{tr}(t\mathbf{Q})}$$

根据迹的线性性质:

$$\text{tr}(t\mathbf{Q}) = t \cdot \text{tr}(\mathbf{Q}) = t \sum_{i \in S} q_{ii}$$

因为 S 有限, 转移速率 q_{ii} 为有限实数, 所以 $t \sum_{i \in S} q_{ii}$ 必然是一个实数 (由于 $q_{ii} \leq 0$, 对于 $t \geq 0$ 这将是一个非正实数)。

在实数域中, 任何实数 x 的指数函数 e^x 都严格大于 0。因此:

$$\det(\mathbf{P}(t)) = e^{t \sum_{i \in S} q_{ii}} > 0$$

对任意 $t \geq 0$ 均成立。 □

11. 在例 2.2.11 中, 记 $h(t) = P_1(X_t = 0)$ 。

(1) 证明: $P_2(X_t = 0) = h^2(t)$ 。

(2) 假设 $\beta \neq \delta$, 利用后退方程证明

$$h(t) = \int_0^t e^{-(\beta+\delta)s} (\delta + \beta h^2(t-s)) ds,$$

并验证 $(\delta e^{\delta t} - \delta e^{\beta t}) / (\delta e^{\delta t} - \beta e^{\beta t})$ 满足此等式。

(3) 求 $P_1(\tau_0 < \infty)$ 。

(4) 假设 $\beta < \delta$, 求 $E_1\tau_0$ 。

例 2.2.11 (连续时间的分支过程): 考虑出生速率与死亡速率分别为 $\beta_i = \beta i$ ($\forall i \geq 0$) 与 $\delta_i = \delta i$ ($\forall i \geq 1$) 的生灭过程。可以认为每个个体的寿命是一个服从 $\text{Exp}(\beta + \delta)$ 的独立随机变量, 个体死亡时产生零个或多个子代, 概率分别为:

$$p_0 = \frac{\delta}{\beta + \delta}, \quad p_2 = \frac{\beta}{\beta + \delta}.$$

此外, 基于该机制, 从 i 出发的分支过程 $\{X_t\}$ 等价于 i 个相互独立的、从 1 出发的分支过程 $\{X_t^{(k)}\}$ 之和。

Proof. (1) 根据分支过程的定义, 从 2 个个体出发的种群演化, 等价于 2 个相互独立的、从 1 出发的子种群演化的叠加。设这两个子过程分别为 $\{X_t^{(1)}\}$ 和 $\{X_t^{(2)}\}$ 。要使时刻 t 种群灭绝 (即 $X_t = 0$), 必须且只需这两个独立的子种群在时刻 t 均灭绝。因此:

$$P_2(X_t = 0) = P(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 0) = P(X_t^{(1)} = 0)P(X_t^{(2)} = 0) = h(t) \cdot h(t) = h^2(t)$$

(2) 对于 $\{X_t\}$, 当 $X_0 = 1$ 时, 系统的一步转移速率为 $q_{10} = \delta$ (死亡并产生 0 个后代), $q_{12} = \beta$ (死亡并分裂为 2 个后代), 以及 $q_{11} = -(\beta + \delta)$ 。利用柯尔莫戈罗夫后退方程 $P'(t) = \mathbf{Q}P(t)$, 考察 $p_{10}(t) = P_1(X_t = 0) = h(t)$ 这一项:

$$\begin{aligned} h'(t) &= p'_{10}(t) = \sum_j q_{1j} p_{j0}(t) \\ &= q_{10} p_{00}(t) + q_{11} p_{10}(t) + q_{12} p_{20}(t) \end{aligned}$$

由于状态 0 是吸收态, 有 $p_{00}(t) = 1$ 。再代入第一问的结论 $p_{20}(t) = h^2(t)$, 方程化为:

$$h'(t) = \delta \cdot 1 - (\beta + \delta)h(t) + \beta h^2(t)$$

移项, 将线性项放在左边:

$$h'(t) + (\beta + \delta)h(t) = \delta + \beta h^2(t)$$

两边同乘积分因子 $e^{(\beta+\delta)t}$:

$$\frac{d}{dt} \left[e^{(\beta+\delta)t} h(t) \right] = e^{(\beta+\delta)t} (\delta + \beta h^2(t))$$

两边从 0 到 t 积分, 注意初值 $h(0) = P_1(X_0 = 0) = 0$ (初始时刻有 1 个活着的个体, 灭绝概率为 0):

$$e^{(\beta+\delta)t} h(t) - 0 = \int_0^t e^{(\beta+\delta)s} (\delta + \beta h^2(s)) ds$$

两边同乘 $e^{-(\beta+\delta)t}$:

$$h(t) = \int_0^t e^{-(\beta+\delta)(t-s)}(\delta + \beta h^2(s)) ds$$

令 $u = t - s$, 即可得到等价的积分方程:

$$h(t) = \int_0^t e^{-(\beta+\delta)u}(\delta + \beta h^2(t-u)) du$$

令 $f(t) = \frac{\delta e^{\delta t} - \delta e^{\beta t}}{\delta e^{\delta t} - \beta e^{\beta t}}$ 。容易验证 $f(0) = \frac{\delta - \delta}{\delta - \beta} = 0$ 。对其求导并化简, 可验证它恒满足常微分方程 $f'(t) = \delta - (\beta + \delta)f(t) + \beta f^2(t)$ 。由一阶常微分方程初值问题解的唯一性, 必有 $h(t) = f(t)$ 。

(3) 记最终灭绝概率为 $x_1 = P_1(\tau_0 < \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ 。根据一步跳跃的条件概率展开, x_1 必须满足平稳方程:

$$x_1 = \frac{\delta}{\beta + \delta} + \frac{\beta}{\beta + \delta} x_1^2$$

化简得一元二次方程: $\beta x_1^2 - (\beta + \delta)x_1 + \delta = 0$ 。该方程的两个根为 1 和 $\frac{\delta}{\beta}$ 。根据分支过程理论, 最终灭绝概率是该方程的最小非负根:

- 当 $\delta \geq \beta$ 时 (死亡率大于等于出生率), 最小非负根为 1, 即 $P_1(\tau_0 < \infty) = 1$;
- 当 $\delta < \beta$ 时 (死亡率小于出生率), 最小非负根为 $\frac{\delta}{\beta}$, 即 $P_1(\tau_0 < \infty) = \frac{\delta}{\beta}$ 。

(4) 由条件 $\beta < \delta$ 可知, 系统最终必然灭绝 (概率为 1)。期望灭绝时间可通过生存函数积分求得:

$$E_1\tau_0 = \int_0^\infty P_1(\tau_0 > t) dt = \int_0^\infty (1 - h(t)) dt$$

代入 $h(t)$ 的解析式:

$$\begin{aligned} 1 - h(t) &= 1 - \frac{\delta e^{\delta t} - \delta e^{\beta t}}{\delta e^{\delta t} - \beta e^{\beta t}} \\ &= \frac{(\delta - \beta)e^{\beta t}}{\delta e^{\delta t} - \beta e^{\beta t}} \\ &= \frac{\delta - \beta}{\delta e^{(\delta-\beta)t} - \beta} \end{aligned}$$

积分化为:

$$E_1\tau_0 = \int_0^\infty \frac{\delta - \beta}{\delta e^{(\delta-\beta)t} - \beta} dt$$

给分子分母同乘 $e^{-(\delta-\beta)t}$:

$$E_1\tau_0 = \int_0^\infty \frac{(\delta - \beta)e^{-(\delta-\beta)t}}{\delta - \beta e^{-(\delta-\beta)t}} dt$$

令 $u = \delta - \beta e^{-(\delta-\beta)t}$, 则 $du = \beta(\delta - \beta)e^{-(\delta-\beta)t} dt$ 。因此 $(\delta - \beta)e^{-(\delta-\beta)t} dt = \frac{1}{\beta} du$ 。当 $t = 0$ 时, $u = \delta - \beta$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-(\delta-\beta)t} \rightarrow 0$, 从而 $u \rightarrow \delta$ 。代入换元:

$$\begin{aligned} E_1\tau_0 &= \int_{\delta-\beta}^{\delta} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\beta} du \\ &= \frac{1}{\beta} [\ln u]_{\delta-\beta}^{\delta} \\ &= \frac{1}{\beta} \ln \frac{\delta}{\delta - \beta} \end{aligned}$$

最终结果为 $E_1\tau_0 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\delta}{\delta - \beta}$ 。 □

12*. 证明: $p_{ij}^{(n)}(t) := P_i(X_t = j, N_t < n)$ 满足如下递推方程:

$$p_{ij}^{(n+1)}(t) := e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}} + \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}^{(n)}(s) ds$$

并由此证明 $p_{ij}(t)$ 满足如下的积分方程:

$$p_{ij}(t) = e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}} + \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(s) ds, \quad \forall i, j \in S, t \geq 0$$

Proof. 设 T_1 为从状态 i 出发时的第一次跳跃时刻。根据 CTMC 的性质, $T_1 \sim \text{Exp}(q_i)$, 其概率密度函数为 $f(s) = q_i e^{-q_i s}$ 。跳跃到状态 k ($k \neq i$) 的概率为 $\frac{q_{ik}}{q_i}$ 。

我们将事件 $\{X_t = j, N_t < n + 1\}$ 按 T_1 发生的时间分为两部分讨论:

- **情形 1:** $T_1 > t$ (在 t 时刻前未发生跳跃) 此时系统始终停留在初始状态 i , 因此跳跃次数 $N_t = 0 < n + 1$ 必然成立。若要 $X_t = j$, 必须要求 $i = j$ 。该部分的概率为:

$$P_i(T_1 > t) 1_{\{i=j\}} = e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}}$$

- **情形 2:** $T_1 = s \leq t$ (在时刻 s 发生了第一次跳跃) 假设系统在时刻 s 跳跃到了状态 k ($k \neq i$)。根据强马氏性, 系统需要在剩余的 $t - s$ 时间内, 从状态 k 到达状态 j 。因为已经发生了一次跳跃, 所以在剩余时间内的跳跃次数必须严格小于 n 次 (这样总跳跃次数才小于 $n + 1$)。该条件概率为 $P_k(X_{t-s} = j, N_{t-s} < n) = p_{kj}^{(n)}(t-s)$ 。对所有可能的跳跃时刻 $s \in (0, t]$ 和所有可能的中间状态 $k \neq i$ 进行积分和求和:

$$\int_0^t \left(\sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i} p_{kj}^{(n)}(t-s) \right) q_i e^{-q_i s} ds = \int_0^t e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}^{(n)}(t-s) ds$$

将情形 1 和情形 2 的概率相加, 得到:

$$p_{ij}^{(n+1)}(t) = e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}} + \int_0^t e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}^{(n)}(t-s) ds$$

为了化为题目要求的形式, 对积分项进行换元, 令 $u = t - s$, 则 $s = t - u$ 且 $ds = -du$ 。积分区间从 $[0, t]$ 变为 $[t, 0]$, 负号刚好将积分上下限翻转:

$$\int_0^t e^{-q_i(t-u)} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}^{(n)}(u) du$$

将积分变量 u 换回 s , 即得证递推方程:

$$p_{ij}^{(n+1)}(t) = e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}} + \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}^{(n)}(s) ds$$

由定义可知, $p_{ij}^{(n)}(t) = P_i(X_t = j, N_t < n)$ 。随着 n 的增大, 事件序列 $\{N_t < n\}$ 是单调递增的, 即 $\{N_t < n\} \subseteq \{N_t < n + 1\}$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其极限事件为 $\{N_t < \infty\}$ (即在有限时间内只发生有限次跳跃, 非爆炸)。因此, 概率 $p_{ij}^{(n)}(t)$ 关于 n 单调递增, 且对于非爆炸的 (正则的) CTMC, 有极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}(t) = P_i(X_t = j, N_t < \infty) = p_{ij}(t)$$

在刚才证明的递推方程两边同时令 $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n+1)}(t) = e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}^{(n)}(s) ds$$

因为被积函数是非负的且单调递增, 根据单调收敛定理, 极限和积分可交换; 同时极限与非负级数求和也可交换:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}} + \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{k \neq i} q_{ik} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{kj}^{(n)}(s) \right) ds \\ &= e^{-q_i t} 1_{\{i=j\}} + \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(s) ds \end{aligned}$$

这就证明了连续时间马氏链转移概率所满足的后退积分方程。 \square

13. 证明: 对任意 $i, j \in S$, $p_{ij}(t)$ 关于 t 一致连续。

Proof. 根据柯尔莫戈罗夫后退方程, 对于任意 $i, j \in S$, 有:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t)$$

两边取绝对值, 并利用三角不等式以及转移概率 $p_{kj}(t) \leq 1$ 的性质, 可得:

$$|p'_{ij}(t)| \leq \sum_{k \in S} |q_{ik}| |p_{kj}(t)| \leq \sum_{k \in S} |q_{ik}|$$

由转移速率矩阵 \mathbf{Q} 的性质, 对角线元素 $q_{ii} = -q_i \leq 0$, 且行和为零即 $\sum_{k \neq i} q_{ik} = q_i$ 。因此:

$$\sum_{k \in S} |q_{ik}| = |q_{ii}| + \sum_{k \neq i} q_{ik} = q_i + q_i = 2q_i$$

因此有:

$$|p'_{ij}(t)| \leq 2q_i$$

根据拉格朗日微分中值定理, 对任意 $t, s \geq 0$, 存在 ξ 介于 s 和 t 之间, 使得:

$$|p_{ij}(t) - p_{ij}(s)| = |p'_{ij}(\xi)| |t - s| \leq 2q_i |t - s|$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$:

- 若 $q_i = 0$ (即 i 为吸收态), 则 $p'_{ij}(t) = 0$, $p_{ij}(t)$ 为常数, 显然一致连续。
- 若 $q_i > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2q_i}$ 。当 $|t - s| < \delta$ 时, 恒有:

$$|p_{ij}(t) - p_{ij}(s)| \leq 2q_i |t - s| < 2q_i \cdot \frac{\varepsilon}{2q_i} = \varepsilon$$

由于所取的 δ 仅与状态 i 和 ε 有关, 而与具体的时间 t, s 无关, 故 $p_{ij}(t)$ 关于 t 是一致连续的。 \square

14*. 假设 S 可列, 试给出下式的一个 (关于 f 的) 充分条件:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j \in S} p_{ij}(t) f(j) \right) = \sum_{j, k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) f(j), \quad i \in S$$

Proof. 充分条件: 假设 f 为 S 上的有界函数, 即存在常数 $M > 0$, 使得对任意 $j \in S$, 都有 $|f(j)| \leq M$ 。
根据连续时间马氏链的性质, 假定该过程满足柯尔莫戈罗夫后退方程:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t)$$

我们需要证明无穷级数 $F(t) = \sum_{j \in S} p_{ij}(t) f(j)$ 可以逐项求导, 只需验证导数级数 $\sum_{j \in S} p'_{ij}(t) f(j)$ 在任意有限区间上一致绝对收敛。

考察导数级数的绝对值之和:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} |p'_{ij}(t) f(j)| &\leq \sum_{j \in S} M |p'_{ij}(t)| \\ &= M \sum_{j \in S} \left| \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) \right| \\ &\leq M \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} |q_{ik}| p_{kj}(t) \end{aligned}$$

由于各项非负，利用 Fubini 定理交换求和次序：

$$M \sum_{k \in S} |q_{ik}| \left(\sum_{j \in S} p_{kj}(t) \right)$$

因为转移概率满足 $\sum_{j \in S} p_{kj}(t) \leq 1$ ，上式可进一步放缩为：

$$\leq M \sum_{k \in S} |q_{ik}|$$

由转移速率矩阵 \mathbf{Q} 的性质，非对角线元素非负且对角线元素为行和的相反数，因此绝对值之和为：

$$\sum_{k \in S} |q_{ik}| = |q_{ii}| + \sum_{k \neq i} q_{ik} = q_i + q_i = 2q_i$$

得到一个与时间 t 无关的一致上界：

$$\sum_{j \in S} |p'_{ij}(t)f(j)| \leq 2Mq_i < \infty$$

由 Weierstrass M 判别法，导数级数 $\sum_{j \in S} p'_{ij}(t)f(j)$ 在 $t \geq 0$ 上一致绝对收敛。因此，求导与求和可交换：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j \in S} p_{ij}(t)f(j) \right) &= \sum_{j \in S} \frac{d}{dt} (p_{ij}(t))f(j) \\ &= \sum_{j \in S} p'_{ij}(t)f(j) \\ &= \sum_{j \in S} \left(\sum_{k \in S} q_{ik}p_{kj}(t) \right) f(j) \end{aligned}$$

最后，由于双重级数 $\sum_{j \in S} \sum_{k \in S} |q_{ik}p_{kj}(t)f(j)| \leq 2Mq_i < \infty$ 绝对收敛，可以解除括号并重新组合：

$$= \sum_{j, k \in S} q_{ik}p_{kj}(t)f(j)$$

□

15*. 假设 S 有限, 对任意 $i, j \in S, q_{ij} = q_{ji}$ 。给定初分布 μ 。对任意 $t \geq 0, i \in S$, 记 $p_i(t) = P_\mu(X_t = i)$, 并令

$$f(t) = - \sum_{i \in S} p_i(t) \ln p_i(t)$$

证明: f 是单调上升的函数。

Proof. 对 $f(t)$ 关于时间 t 求导：

$$\begin{aligned} f'(t) &= - \sum_{i \in S} \frac{d}{dt} (p_i(t) \ln p_i(t)) \\ &= - \sum_{i \in S} \left(p'_i(t) \ln p_i(t) + p_i(t) \cdot \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right) \\ &= - \sum_{i \in S} p'_i(t) \ln p_i(t) - \sum_{i \in S} p'_i(t) \end{aligned}$$

由于在任意时刻概率分布必须满足 $\sum_{i \in S} p_i(t) = 1$ ，对其求导可得 $\sum_{i \in S} p'_i(t) = 0$ 。因此，导数表达式中的第二项为零，化简为：

$$f'(t) = - \sum_{i \in S} p'_i(t) \ln p_i(t)$$

根据柯尔莫戈罗夫前进方程，状态概率的演化满足：

$$p'_i(t) = \sum_{j \in S} p_j(t)q_{ji}$$

利用转移速率矩阵行的性质 $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0$, 我们有对角线元素 $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ 。又因为题目已知系统是对称的, 即对任意 $i, j \in S$ 都有 $q_{ij} = q_{ji}$ 。我们可以对 $p'_i(t)$ 进行改写:

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= \sum_{j \neq i} p_j(t) q_{ji} + p_i(t) q_{ii} \\ &= \sum_{j \neq i} p_j(t) q_{ij} - p_i(t) \sum_{j \neq i} q_{ij} \\ &= \sum_{j \neq i} q_{ij} (p_j(t) - p_i(t)) \end{aligned}$$

将改写后的 $p'_i(t)$ 代回 $f'(t)$ 的表达式中:

$$f'(t) = -\sum_{i \in S} \sum_{j \neq i} q_{ij} (p_j(t) - p_i(t)) \ln p_i(t)$$

这是一个关于指标 i 和 j 的双重求和。由于是对称的遍历求和, 我们将指标 i 和 j 互换, 求和的总值保持不变, 即得到另一个等价的表达式:

$$f'(t) = -\sum_{j \in S} \sum_{i \neq j} q_{ji} (p_i(t) - p_j(t)) \ln p_j(t)$$

利用 $q_{ji} = q_{ij}$, 并提取一个负号将括号内的项翻转:

$$f'(t) = \sum_{i \in S} \sum_{j \neq i} q_{ij} (p_j(t) - p_i(t)) \ln p_j(t)$$

将上述两个关于 $f'(t)$ 的表达式相加, 得到 $2f'(t)$:

$$\begin{aligned} 2f'(t) &= \sum_{i \in S} \sum_{j \neq i} q_{ij} (p_j(t) - p_i(t)) \ln p_j(t) - \sum_{i \in S} \sum_{j \neq i} q_{ij} (p_j(t) - p_i(t)) \ln p_i(t) \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{j \neq i} q_{ij} (p_j(t) - p_i(t)) (\ln p_j(t) - \ln p_i(t)) \end{aligned}$$

分析这个求和式中每一项的符号:

- 对于任意的 $i \neq j$, 转移速率必有 $q_{ij} \geq 0$ 。
- 对于自然对数函数 $y = \ln x$, 它在定义域上是严格单调递增的。因此, 如果 $p_j(t) > p_i(t)$, 则 $\ln p_j(t) > \ln p_i(t)$, 两个因式的乘积为正; 如果 $p_j(t) < p_i(t)$, 则 $\ln p_j(t) < \ln p_i(t)$, 两个因式的乘积 (负负得正) 依然为正; 如果 $p_j(t) = p_i(t)$, 则乘积为 0。

这说明, 对于任意一对 i, j , 始终有:

$$(p_j(t) - p_i(t)) (\ln p_j(t) - \ln p_i(t)) \geq 0$$

因此, 整个求和式中的每一项都是非负的, 即:

$$2f'(t) \geq 0 \implies f'(t) \geq 0$$

这就严格证明了 $f(t)$ 关于时间 t 是一个单调上升的函数。 □

2.3 常返

1. 假设 $i \neq j$ 。证明: $i \rightarrow j$ 与下列三条均等价:

- (1) 存在 $n \geq 1, i_0, \dots, i_n$ (其中 $i_0 = i, i_n = j$), 使得 $q_{i_0 i_1}, \dots, q_{i_{n-1} i_n} > 0$;
- (2) 对任意 $t > 0, p_{ij}(t) > 0$;
- (3) 存在 $t > 0$, 使得 $p_{ij}(t) > 0$ 。(注: 不可约的跳过程都是非周期的。)

Proof. 证明逻辑链 (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1) 得出相互等价。

(1) \implies (2)

假设存在状态序列 i_0, i_1, \dots, i_n (其中 $i_0 = i, i_n = j$), 使得对于所有的 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 都有转移速率 $q_{i_k i_{k+1}} > 0$ 。

我们先考察任意两个满足 $q_{xy} > 0$ 的直接相连状态 x, y 。对于任意给定的时间 $t > 0$, 系统从 x 转移到 y 的概率 $p_{xy}(t)$, 必定大于等于“系统在 $(0, t)$ 内某个时刻 s 从 x 跳至 y , 并且在跳跃前后分别在 x 和 y 保持不动”的概率。将这个下界用积分表达出来:

$$p_{xy}(t) \geq \int_0^t e^{-q_x s} q_{xy} e^{-q_y(t-s)} ds$$

由于指数函数恒大于 0, 且 $q_{xy} > 0$, 上述被积函数在整个积分区间 $(0, t)$ 内严格大于 0。因此, 其定积分必然严格大于 0, 即对任意 $t > 0$, $p_{xy}(t) > 0$ 。

现在回到我们的路径 $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_n$ 。根据 Chapman-Kolmogorov 方程, 我们将时间 t 均分为 n 份:

$$p_{ij}(t) \geq p_{i_0 i_1} \left(\frac{t}{n} \right) p_{i_1 i_2} \left(\frac{t}{n} \right) \cdots p_{i_{n-1} i_n} \left(\frac{t}{n} \right)$$

由前面的结论, 由于 $q_{i_k i_{k+1}} > 0$, 等式右边的每一个因子 $p_{i_k i_{k+1}}(t/n)$ 都严格大于 0。所以对于任意的 $t > 0$, 都有 $p_{ij}(t) > 0$ 。这就证明了 (2)。

(2) \implies (3)

显然。

(3) \implies (1)

反证: 假设 (1) 不成立, 即不存在从 i 到 j 的使得每一步速率都大于 0 的路径。

令 C 表示从状态 i 出发, 能够通过速率大于 0 的路径到达的所有状态的集合 (约定 $i \in C$)。根据我们的假设, 目标状态 $j \notin C$ 。由集合 C 的定义可知, 对于任意的 $x \in C$ 和 $y \notin C$, 必然有转移速率 $q_{xy} = 0$ 。

这说明集合 C 是一个闭集: 系统一旦处于 C 中的状态, 就没有任何正的概率速率跳出 C 。既然初始状态 $X_0 = i \in C$, 那么对任意的时刻 $t > 0$, 系统必定以概率 1 停留在集合 C 中, 即:

$$P_i(X_t \in C) = 1$$

因为 $j \notin C$, 所以系统在时刻 t 处于状态 j 的概率为:

$$p_{ij}(t) = P_i(X_t = j) = 0$$

这对于所有的 $t > 0$ 都成立, 从而与条件 (3) 中“存在 $t > 0$ 使得 $p_{ij}(t) > 0$ ”直接矛盾。因此 (1) 必定成立。 \square

2. 假设 $\{X_t\}$ 是跳过程, 状态 i 非常返, $X_0 = i$ 。证明 $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=i\}} dt$ 服从指数分布。

Proof. 记 $T = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=i\}} dt$, 它表示系统在状态 i 逗留的总时间。由于每次到达状态 i 后的逗留时间是相互独立的, 我们可以将 T 写为:

$$T = \sum_{k=1}^{V_i} \zeta_{i,k}$$

其中, $\zeta_{i,k}$ 是第 k 次访问状态 i 时的逗留时间, V_i 是访问状态 i 的总次数 (包含初始时刻 $X_0 = i$ 的那一次)。

由跳过程的性质可知, 逗留时间 $\zeta_{i,k} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(q_i)$, 即独立同分布于参数为 q_i 的指数分布。由于状态 i 是非常返的, 系统最终一定会永远离开状态 i 。设系统从状态 i 出发, 能够再次回到状态 i 的概率为 p , 即 $p = P_i(\tau_i < \infty) < 1$ 。因此, 总访问次数 V_i 服从几何分布:

$$P(V_i = n) = (1-p)p^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

我们来计算 T 的尾概率 $P(T > t)$ 。利用全概率公式对访问次数 V_i 进行条件展开:

$$P(T > t) = \sum_{n=1}^{\infty} P \left(\sum_{k=1}^n \zeta_{i,k} > t \mid V_i = n \right) P(V_i = n)$$

由于 $\{\zeta_{i,k}\}$ 相互独立且与 V_i 独立, n 个独立同分布的指数随机变量之和服从 Gamma 分布, 即 $\sum_{k=1}^n \zeta_{i,k} \sim \text{Gamma}(n, q_i)$ 。其概率密度函数为 $f_n(x) = \frac{q_i^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-q_i x}$ 。

代入全概率公式:

$$P(T > t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_t^\infty \frac{q_i^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-q_i x} dx \right) (1-p)p^{n-1}$$

由于被积函数非负, 根据 Fubini-Tonelli 定理, 我们可以交换求和与积分的次序:

$$\begin{aligned} P(T > t) &= \int_t^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{q_i^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-q_i x} (1-p) p^{n-1} dx \\ &= \int_t^\infty q_i (1-p) e^{-q_i x} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{(q_i p x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) dx \end{aligned}$$

观察括号内的无穷级数, 令 $m = n - 1$, 它恰好是指数函数 $e^{q_i p x}$ 的泰勒展开式:

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{(q_i p x)^m}{m!} = e^{q_i p x}$$

将其代回积分中, 指数项合并:

$$\begin{aligned} P(T > t) &= \int_t^\infty q_i (1-p) e^{-q_i x} \cdot e^{q_i p x} dx \\ &= \int_t^\infty q_i (1-p) e^{-q_i (1-p)x} dx \end{aligned}$$

这恰好是参数为 $q_i(1-p)$ 的指数分布在 (t, ∞) 上的积分。计算可得:

$$P(T > t) = \left[-e^{-q_i(1-p)x} \right]_t^\infty = e^{-q_i(1-p)t}$$

故逗留总时间 T 服从参数为 $q_i(1-p)$ 的指数分布:

$$T \sim \text{Exp}(q_i(1-p))$$

□

3. 假设 $\{X_t\}$ 是 \mathbb{Z} 上连续时间参数的随机游动, $X_0 = 0$, 转移速率如下: 对任意 $i \in \mathbb{Z}$, $q_{i,i+1} = \lambda$, $q_{i,i-1} = \mu$, $q_i = \lambda + \mu$, 其中 $\lambda \neq \mu$. 求 $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=1\}} dt$ 的分布。

Proof. 记 $T_1 = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=1\}} dt$ 为系统在状态 1 逗留的总时间。由于 $X_0 = 0 \neq 1$, 系统必须先到达状态 1, 才能在状态 1 产生逗留时间。设 τ_1 为首次到达状态 1 的时间。根据强马氏性, 一旦系统在 τ_1 时刻到达状态 1, 其后续行为与直接从状态 1 出发的马氏链完全相同。

记 $f_{01} = P_0(\tau_1 < \infty)$ 为从 0 出发能够到达 1 的概率。记 $f_{11} = P_1(\tau_1 < \infty)$ 为从 1 出发能够再次回到 1 的返回概率。根据第 2 题的结论, 给定系统到达了状态 1, 其在状态 1 的总逗留时间 \tilde{T}_1 服从参数为 $q_1(1-f_{11})$ 的指数分布。因此, T_1 的分布是一个混合分布:

- 以 $1 - f_{01}$ 的概率, 系统永远到达不了状态 1, 此时 $T_1 = 0$;
- 以 f_{01} 的概率, 系统到达状态 1, 此时 $T_1 \sim \text{Exp}(q_1(1-f_{11}))$ 。

考察嵌入马氏链。它是一个在 \mathbb{Z} 上的非对称简单随机游动, 向右走一步的概率为 $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, 向左走一步的概率为 $q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ 。根据赌徒破产问题的经典结论, 状态 i 到达 $i+1$ 的概率 $f_{i,i+1}$ 和到达 $i-1$ 的概率 $f_{i,i-1}$ 取决于漂移方向:

情形 1: $\lambda > \mu$ (向右漂移) 此时 $p > q$ 。系统向右是必然事件, 向左是非常返的。首中概率为: $f_{01} = 1$, 且 $f_{21} = \frac{q}{p} = \frac{\mu}{\lambda}$ 。计算返回概率 f_{11} :

$$f_{11} = p \cdot f_{21} + q \cdot f_{01} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot 1 = \frac{2\mu}{\lambda+\mu}$$

由于 $f_{01} = 1$, 系统必然到达状态 1, 故 T_1 没有 0 处的点质量。逗留时间服从指数分布, 其参数为:

$$\theta = q_1(1-f_{11}) = (\lambda+\mu) \left(1 - \frac{2\mu}{\lambda+\mu} \right) = \lambda - \mu$$

当 $\lambda > \mu$ 时, $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda - \mu)$ 。

情形 2: $\lambda < \mu$ (向左漂移) 此时 $p < q$ 。系统向左是必然事件, 向右是非常返的。首中概率为: $f_{01} = \frac{p}{q} = \frac{\lambda}{\mu}$, 且 $f_{21} = 1$ 。计算返回概率 f_{11} :

$$f_{11} = p \cdot f_{21} + q \cdot f_{01} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot 1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\lambda}{\lambda+\mu}$$

指数分布的参数为:

$$\theta = q_1(1 - f_{11}) = (\lambda + \mu) \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda + \mu} \right) = \mu - \lambda$$

由于 $f_{01} = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, 系统有 $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ 的概率永远不到达状态 1。当 $\lambda < \mu$ 时, T_1 的分布为零点含有截断概率的混合指数分布:

$$P(T_1 = 0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

对于任意 $t > 0$, 其尾概率为:

$$P(T_1 > t) = P(\text{到达 } 1) \cdot P(\tilde{T}_1 > t) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)t}$$

□

4. 证明: 下列两条均为 i 常返的等价条件:

- (1) 对任意 $\delta > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n\delta) = \infty$;
- (2) 存在 $\delta > 0$, 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n\delta) = \infty$ 。

Proof. 证明逻辑链: i 常返 \implies (1) \implies (2) $\implies i$ 常返得出相互等价。

i 常返 \implies (1)

采用反证法。假设存在 $\delta > 0$, 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n\delta) < \infty$ 。令 $W = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{n\delta}=i\}}$ 表示系统在离散时间点 $\{n\delta\}$ 处于状态 i 的总次数。根据假设, 期望 $E_i W = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n\delta) < \infty$, 这说明 W 几乎处处有限, 即 $P_i(W < \infty) = 1$ 。

记 $N = \sup\{n \geq 0 : X_{n\delta} = i\}$ 为系统在离散网格上最后一次访问状态 i 的时间指标。由于 $W < \infty$, 故 N 也是有限的, 即 $P_i(N < \infty) = 1$ 。

现在固定 $n \in \mathbb{N}$ 。考虑事件 $\{N = n\}$, 显然有 $\{N = n\} \subset \{X_{n\delta} = i\}$ 。在 $\{X_{n\delta} = i\}$ 发生的条件下, 定义 T_m 为 $n\delta$ 之后第 m 次跳回状态 i 的时刻, ζ_m 为第 m 次跳回 i 后的逗留 (等待) 时间。因为已知 i 是常返态, 所以系统会无限次地回到状态 i , 即对任意 $m \geq 1$, $P_i(T_m < \infty) = 1$ 。故 ζ_m 的定义是良好的。同时, 对于任意的 $l \geq 1$, 事件 $\{N = n\}$ 意味着在 $n\delta$ 之后, 系统在所有的离散时间点 $n_1\delta$ ($n_1 > n$) 都不在状态 i 。为了避开所有的网格点, 系统每次在状态 i 的逗留时间必须严格小于网格间距 δ :

$$\{N = n\} = \{X_{n\delta} = i, \forall n_1 > n, X_{n_1\delta} \neq i\} \subset \{X_{n\delta} = i, \forall m \geq 1, \zeta_m < \delta\}$$

进一步放缩, 仅考虑前 l 次逗留:

$$\{N = n\} \subset \{X_{n\delta} = i, \forall 1 \leq m \leq l, \zeta_m < \delta\}$$

对于固定的 n , 在给定 $X_{n\delta} = i$ 的条件下, 每次的逗留时间 ζ_m 相互独立且同服从参数为 q_i 的指数分布 $\text{Exp}(q_i)$ 。因此取概率:

$$P_i(N = n) \leq P_i(\zeta_1 < \delta)^l = (1 - e^{-q_i\delta})^l, \quad \forall l \geq 1$$

令 $l \rightarrow \infty$, 由于 $1 - e^{-q_i\delta} < 1$, 可得 $P_i(N = n) = 0$ 。那么 $P_i(N < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(N = n) = 0$, 这与之前得出的 $P_i(N < \infty) = 1$ 矛盾。故假设不成立, (1) 得证。

(1) \implies (2)

显然。

(2) $\implies i$ 常返

已知存在 $\delta > 0$, 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n\delta) = \infty$ 。仍然记 $W = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{n\delta}=i\}}$, 此时有 $E_i W = \infty$ 。令 $\omega = \inf\{n \geq 1 : X_{n\delta} = i\}$ 为在离散网格上首次回到状态 i 的时间指标。 ω 是一个离散骨架上的停时。对于任意 $k \geq 1$, 利用强马氏性:

$$\begin{aligned} P_i(W = k + 1) &= P_i \left(\sum_{n=\omega}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{n\delta}=i\}} = k, \omega < \infty \right) \\ &= P_i \left(\sum_{n=\omega}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{n\delta}=i\}} = k \mid \omega < \infty \right) P_i(\omega < \infty) \end{aligned}$$

记 $Y_t = X_{t+\omega\delta}$, 根据强马氏性, Y_t 与 X_t 同分布, 故 $\sum_{n=\omega}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{n\delta}=i\}} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_{m\delta}=i\}}$ 与 W 同分布。从而有递推关系:

$$P_i(W = k + 1) = P_i(W = k) \cdot P_i(\omega < \infty)$$

这说明 W 遵循几何分布的递推律。如果 $P_i(\omega < \infty) < 1$, 根据几何分布的性质, 必然有期望 $E_i W < \infty$, 这与我们的已知条件 $E_i W = \infty$ 矛盾。因此, 必须有 $P_i(\omega < \infty) = 1$ 。这蕴含着 $P_i(W = \infty) = 1$ 。

事件 $\{W = \infty\}$ 意味着系统在无穷多个离散网格点 $n\delta$ 处处于状态 i , 即:

$$\{W = \infty\} = \{\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_1 > n \text{ s.t. } X_{n_1\delta} = i\}$$

这显然是事件 $A = \{\forall t > 0, \exists s > t \text{ s.t. } X_s = i\}$ (即连续时间内无限次访问状态 i) 的子集。既然 $P_i(W = \infty) = 1$, 那么必然有 $P_i(A) = 1$ 。这就证明了状态 i 是常返的。 \square

5. 对于有限图上的接触过程, 证明: $P(\tau_\emptyset < \infty) = 1$ 。

Proof. 要证在有限图上, 接触过程无论何种初始状态出发, 以概率 1 走向全员健康的吸收态 (即疾病彻底灭绝)。

设有限图 $G = (V, E)$ 的顶点数为 $|V| = N < \infty$ 。接触过程的状态空间为 $S = \{0, 1\}^V$, 即每个顶点有 0 (健康) 和 1 (感染) 两种状态。显然, 状态空间 S 是有限的, 总共包含 2^N 个状态。

记 \emptyset 为全 0 状态 (没有任何顶点被感染)。根据接触过程定义:

- **感染** ($0 \rightarrow 1$): 速率为 $\lambda \times$ (感染的邻居数)。
- **恢复** ($1 \rightarrow 0$): 速率为 1。

如果某时刻系统处于 \emptyset 状态, 所有顶点的患病邻居数均为 0, 因此发生任何新感染的速率为 0。这意味着 \emptyset 是一个吸收态, 即 $q_{\emptyset, \eta} = 0, \forall \eta \neq \emptyset$ 。

对于任意一个非吸收态 $\eta \in S \setminus \{\emptyset\}$, 假设当前有 k 个顶点处于感染状态 ($1 \leq k \leq N$)。此时, 整个系统中发生的下一个事件只有两种可能: “某人恢复” 或 “某人被感染”。

- 系统的总恢复速率为 $\sum_{x: \eta(x)=1} 1 = k$ 。
- 系统的总感染速率最多为 $\lambda \times k \times (N - 1) \leq \lambda k N$ (最坏的极端情况是这 k 个感染者与所有剩余的健康者都直接相连)。

考察该跳过程的嵌入链。系统离开状态 η 时, 发生的下一步跳跃是 “恢复事件” 的概率 p_{rec} 满足:

$$p_{rec} = \frac{\text{总恢复速率}}{\text{总恢复速率} + \text{总感染速率}} \geq \frac{k}{k + \lambda k N} = \frac{1}{1 + \lambda N}$$

注意到这个下界 $\frac{1}{1 + \lambda N}$ 严格大于 0, 且它是一个与当前具体状态 η 以及感染人数 k 无关的常数。记这个正的常数下界为 $\rho = \frac{1}{1 + \lambda N} > 0$ 。

为了从状态 η 到达吸收态 \emptyset , 最直接的一条路径是: 当前的 k 个感染者接连不断地恢复, 且在此期间不发生任何新的感染事件。最多只需要发生 N 次连续的恢复跳跃, 系统就必然到达 \emptyset 。由于每次发生恢复跳跃的概率都至少为 ρ , 故从任意状态 η 出发, 在最多 N 步跳跃内到达吸收态 \emptyset 的概率有严格的统一正下界:

$$P_\eta(\text{最多 } N \text{ 步跳跃后到达 } \emptyset) \geq \rho^N > 0$$

令 $\epsilon = \rho^N$ 。由于 N 和 λ 都是有限常数, 必有 $\epsilon \in (0, 1)$ 。

既然从任何一个非吸收态出发, 经历 N 步跳跃后到达吸收态的概率都至少为 $\epsilon > 0$ 。我们可以将系统的演化按 N 步跳跃划分为一个个 “时间块”。系统在经过 m 个这样的时间块 (即总共进行了 mN 次跳跃) 后, 仍然存活 (未到达 \emptyset) 的概率满足:

$$P(\text{经过 } mN \text{ 步跳跃仍未到达 } \emptyset) \leq (1 - \epsilon)^m$$

由于 $0 < \epsilon < 1$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $(1 - \epsilon)^m \rightarrow 0$ 。这说明系统在经过无穷多次跳跃后依然存活的概率为 0。

最后, 由于该过程是有限状态空间上的连续时间马氏链, 转移速率有界, 因此不可能在有限时间内发生无穷多次跳跃 (即过程是非爆炸的)。跳跃步数趋于无穷等价于时间 $t \rightarrow \infty$ 。由此可得, 系统必然在有限的时间内进入吸收态 \emptyset , 即灭绝时间 τ_\emptyset 几乎必然有限:

$$P(\tau_\emptyset < \infty) = 1$$

\square

6. 证明: 在例 2.3.6 中, 对任意 A 为 \mathbb{Z} 的非空有限子集,

$$\lambda_c = \inf\{\lambda : P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) > 0\} = \sup\{\lambda : P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset < \infty) = 1\}$$

例 2.3.6 (Z 上的有限接触过程): 考虑 Z 上的有限接触过程, 参数为 λ 。空集 \emptyset 表示没有个体被感染的状态, 它是唯一的吸收态。对 Z 的任意有限子集 A , 记从初始状态 A 出发的概率测度为 $P_A^{(\lambda)}$, τ_\emptyset 为疾病灭绝时间。定义疾病的存活概率为 $P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty)$ 。由于存活概率关于 λ 单调, 定义接触过程的临界值为 $\lambda_c = \inf\{\lambda > 0 : P_{\{0\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) > 0\}$ 。

Proof. 已知基于单点初始状态的临界值为 $\lambda_c = \inf\{\lambda > 0 : P_{\{0\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) > 0\}$ 。我们首先证明 $\lambda_c(A) = \lambda_c$ 。证明分为两步。

第一步: 证明 $\lambda_c(A) \leq \lambda_c$

由于 A 是非空子集, 必然存在某个点 $x \in A$, 从而 $\{x\} \subseteq A$ 。根据接触过程的单调性, 初始感染集越大, 后续时刻处于感染状态的节点越多。因此存活概率满足单调性:

$$P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) \geq P_{\{x\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty)$$

又因为 Z 上的接触过程具有空间平移不变性, 从 $\{x\}$ 出发与从原点 $\{0\}$ 出发的存活概率完全相同:

$$P_{\{x\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) = P_{\{0\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty)$$

因此, 只要 $\lambda > \lambda_c$, 就有 $P_{\{0\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) > 0$, 从而必然有 $P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) > 0$ 。这说明能让 $\{0\}$ 存活的 λ 也能让 A 存活, 所以下确界 $\lambda_c(A) \leq \lambda_c$ 。

第二步: 证明 $\lambda_c(A) \geq \lambda_c$

由接触过程的可加性。记 ξ_t^B 为从初始状态 B 出发时, 时刻 t 处于感染状态的顶点集合。根据可加性, 从集合 A 出发的感染演化等价于从 A 中每个单点出发的感染演化的并集:

$$\xi_t^A = \bigcup_{x \in A} \xi_t^{\{x\}}$$

疾病存活事件 $\{\tau_\emptyset^A = \infty\}$ 意味着对任意 $t > 0$ 都有 $\xi_t^A \neq \emptyset$ 。由上述并集关系可知, 如果从 A 出发能够存活, 必然存在至少一个 $x \in A$, 使得从 $\{x\}$ 出发的子过程存活。即:

$$\{\tau_\emptyset^A = \infty\} = \bigcup_{x \in A} \{\tau_\emptyset^{\{x\}} = \infty\}$$

利用概率的 Union Bound 可得:

$$P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) \leq \sum_{x \in A} P_{\{x\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) = |A| \cdot P_{\{0\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty)$$

因为 A 是有限集, 其基数 $|A| < \infty$ 。如果 $\lambda < \lambda_c$, 由单点临界值的定义可知 $P_{\{0\}}^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) = 0$ 。将其代入上式即得 $P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) = 0$ 。这说明不能让 $\{0\}$ 存活的 λ 也绝对不能让有限集 A 存活, 故下确界 $\lambda_c(A) \geq \lambda_c$ 。

综合一、二两步, 我们得出 $\lambda_c(A) = \lambda_c$ 。

第三步: 证明与上确界公式的等价性

根据概率的性质, 疾病要么在有限时间内灭绝, 要么永远存活, 两者是完备的对立事件:

$$P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) + P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset < \infty) = 1$$

因此, 事件概率严格大于零的条件 $P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) > 0$ 与 $P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset < \infty) < 1$ 是完全等价的。

又因为存活概率 $P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty)$ 关于感染率 λ 是单调不减的, 所以使得存活概率严格大于 0 的 λ 集合是一个向上延伸的区间 (形如 (λ_c, ∞) 或 $[\lambda_c, \infty)$)。使得灭绝概率等于 1 (即存活概率等于 0) 的 λ 集合则是它的补集, 是一个向下延伸的区间 (形如 $(0, \lambda_c]$ 或 $(0, \lambda_c)$)。

在实数域中, 一个右半区间的下确界, 必然严格等于其互补左半区间的上确界。由此直接得出:

$$\inf\{\lambda : P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset = \infty) > 0\} = \sup\{\lambda : P_A^{(\lambda)}(\tau_\emptyset < \infty) = 1\}$$

等式两端皆等价于 λ_c , 证明完毕。 □

2.4 正常返与不变分布

1. 证明引理 2.4.1: 设 $X_0 = i$ 。则 $(\sigma_{i,1}, \zeta_{i,1}), (\sigma_{i,2}, \zeta_{i,2}), \dots$ 为独立同分布的随机向量列。其中变量定义如下: 假设 \mathbf{Q} 不可约、常返, 且 $|S| > 1$ 。取定状态 i 。记

$$\tau_i := \inf\{t \geq 0 : X_t = i\}, \quad \sigma_i := \inf\{t \geq S_1 : X_t = i\},$$

其中, S_1 是跳过程第一次跳跃的时刻, 因此当 $X_0 = i$ 时, σ_i 是从 i 出发的跳过程离开初始状态 i 后首次回到 i 的时刻。

假设 $X_0 = i$ 。则 $T_{i,0} = \tau_i = 0$, $T_{i,1} = \sigma_i$ 。将 $T_{i,r}$ 理解为第 r 次回访 i 的时刻。令 $\sigma_{i,r} := T_{i,r} - T_{i,r-1}$, 它表示从第 $r-1$ 次回访 i 到第 r 次回访 i 所经历的时间。在这两次回访之间的时间段中, 粒子在状态 i 停留的时间长度为 $\zeta_{i,r}$, 已知 $\zeta_{i,1}, \zeta_{i,2}, \dots$ 独立同分布。

Proof. 已知连续时间马氏链 $\{X_t\}$ 不可约且常返, 初始状态 $X_0 = i$ 。记 $T_{i,0} = 0$, 且对于 $r \geq 1$, $T_{i,r}$ 为第 r 次回访状态 i 的时刻。因为状态 i 是常返的, 所以对于所有的 $r \geq 1$, 第 r 次回访时刻几乎必然有限, 即 $P_i(T_{i,r} < \infty) = 1$ 。由于到达某状态的时间是一个停时, 所以序列 $T_{i,1}, T_{i,2}, \dots$ 是一列几乎处处有限的停时。

根据强马氏性, 对于任意的 $r \geq 1$, 在停时 $T_{i,r-1}$ 之后的过程:

$$Y_t^{(r)} := X_{T_{i,r-1}+t}, \quad t \geq 0$$

与 $T_{i,r-1}$ 之前的轨道 $\mathcal{F}_{T_{i,r-1}}$ 相互独立, 且其概率分布与从状态 i 出发的原始过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 的概率分布完全相同。

现在, 我们考察第 r 轮回访周期内的变量 $(\sigma_{i,r}, \zeta_{i,r})$:

- $\zeta_{i,r}$ 是第 r 次访问状态 i 的逗留时间。在平移过程 $Y^{(r)}$ 中, 它表示从时刻 0 出发, 首次离开状态 i 的时间:

$$\zeta_{i,r} = \inf\{t > 0 : Y_t^{(r)} \neq i\}$$

- $\sigma_{i,r} = T_{i,r} - T_{i,r-1}$ 是从第 $r-1$ 次回访到第 r 次回访所经历的总时间。在平移过程 $Y^{(r)}$ 中, 它表示离开状态 i 后首次回到状态 i 的时间:

$$\sigma_{i,r} = \inf\{t > \zeta_{i,r} : Y_t^{(r)} = i\}$$

可以看到, 二维随机向量 $(\sigma_{i,r}, \zeta_{i,r})$ 仅仅是平移过程 $\{Y_t^{(r)}, t \geq 0\}$ 轨道的泛函。既然对于每一个 $r \geq 1$, 平移过程 $Y^{(r)}$ 都与之前的历史过程独立, 且与初始过程 X 同分布, 那么由这些平移过程决定的泛函 $(\sigma_{i,r}, \zeta_{i,r})$ 自然也与之之前周期的变量相互独立, 并且具有完全相同的联合概率分布。

因此, 随机向量列 $(\sigma_{i,1}, \zeta_{i,1}), (\sigma_{i,2}, \zeta_{i,2}), \dots$ 是独立同分布 (i.i.d.) 的。 \square

2. 假设 \mathbf{Q} 不可约。若存在 S 上的测度 λ 满足 $\lambda\mathbf{Q} = 0$ 且 $\sum_{i \in S} \lambda_i = \infty$, 则不变分布不存在。

Proof. 反证: 假设该不可约的跳过程存在不变分布 $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ 。根据不变分布的定义, π 必须满足:

$$\pi\mathbf{Q} = 0, \quad \pi_i \geq 0, \quad \sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

由于 \mathbf{Q} 是不可约的, 根据连续时间马氏链不变测度的唯一性定理, 满足方程 $\nu\mathbf{Q} = 0$ 的正测度 ν 必定是唯一的 (相差一个常数倍)。具体而言, 我们可以任取一个固定状态 $k \in S$, 定义测度 μ 为系统在两次访问状态 k 的周期内, 在状态 i 逗留的期望时间:

$$\mu_i = E_k \int_0^{\sigma_k} \mathbf{1}_{\{X_t = i\}} dt$$

(其中 σ_k 为离开状态 k 后首次回到 k 的时间)。定理保证了 $\mu\mathbf{Q} = 0$, 且任何其他满足该方程的测度与 μ 成比例。

因此, 对于存在的不变分布 π 和题目中给定的测度 λ (已知 $\lambda\mathbf{Q} = 0$), 必然分别存在常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$ (由于 π 和 λ 都是非平凡的非负测度), 使得对任意 $i \in S$ 都有:

$$\pi_i = c_1 \mu_i$$

$$\lambda_i = c_2 \mu_i$$

现在, 我们对这两种测度分别在整个状态空间 S 上求和。对于不变分布 π , 根据归一性:

$$\sum_{i \in S} \pi_i = \sum_{i \in S} c_1 \mu_i = c_1 \sum_{i \in S} \mu_i = 1$$

因为 $c_1 > 0$ ，这直接推导出 $\sum_{i \in S} \mu_i = \frac{1}{c_1} < \infty$ 。

然而，对于测度 λ ，根据题目给定的条件：

$$\sum_{i \in S} \lambda_i = \sum_{i \in S} c_2 \mu_i = c_2 \sum_{i \in S} \mu_i = \infty$$

因为 c_2 是一个有限的正实数，这必然要求 $\sum_{i \in S} \mu_i = \infty$ 。矛盾。 \square

3. 假设 \mathbf{Q} 不可约、正常返， π 是不变分布。证明：对任意 $i \in S$ 和任意初分布 μ ，

$$P_\mu \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds - \pi_i \right| = 0 \right) = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t P_\mu(X_s = i) ds - \pi_i \right| = 0$$

Proof. **第一部分：证明经验测度的 L^1 几乎处处收敛**

记 $Y_i(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds$ ，它表示系统在时间 $[0, t]$ 内处于状态 i 的时间比例。由于 \mathbf{Q} 是不可约且正常返的，存在唯一的不变分布 π 。根据连续时间马氏链的遍历定理，对于任意初始分布 μ 和任意固定的状态 $i \in S$ ，有：

$$P_\mu \left(\lim_{t \rightarrow \infty} Y_i(t) = \pi_i \right) = 1$$

令 Ω_i 为满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_i(t) = \pi_i$ 的样本轨道集合，则 $P_\mu(\Omega_i) = 1$ 。由于状态空间 S 是可列集，可数个概率为 1 的事件的交集概率仍为 1。令 $\Omega^* = \bigcap_{i \in S} \Omega_i$ ，则 $P_\mu(\Omega^*) = 1$ 。在 Ω^* 上，对所有 $i \in S$ 均有 $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_i(t) = \pi_i$ 。

接下来在 Ω^* 上（即几乎处处），我们考察级数 $\sum_{i \in S} |Y_i(t) - \pi_i|$ 。利用绝对值恒等式 $|a-b| = (a-b) + 2(b-a)^+$ ，其中 $(x)^+ = \max(x, 0)$ ，我们可以将和式展开：

$$\sum_{i \in S} |Y_i(t) - \pi_i| = \sum_{i \in S} (Y_i(t) - \pi_i) + 2 \sum_{i \in S} (\pi_i - Y_i(t))^+$$

注意到对任意 $t > 0$ ， $\sum_{i \in S} Y_i(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i \in S} \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds = \frac{1}{t} \int_0^t 1 ds = 1$ 。又因为不变分布满足 $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ ，所以级数的第一项恒为 0：

$$\sum_{i \in S} (Y_i(t) - \pi_i) = \sum_{i \in S} Y_i(t) - \sum_{i \in S} \pi_i = 1 - 1 = 0$$

因此， $\sum_{i \in S} |Y_i(t) - \pi_i| = 2 \sum_{i \in S} (\pi_i - Y_i(t))^+$ 。

对于被加项 $(\pi_i - Y_i(t))^+$ ，由于 $Y_i(t) \geq 0$ ，显然有 $0 \leq (\pi_i - Y_i(t))^+ \leq \pi_i$ 。因为 $\sum_{i \in S} \pi_i = 1 < \infty$ ，且 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\pi_i - Y_i(t))^+ = (\pi_i - \pi_i)^+ = 0$ ，根据 Weierstrass M 判别法，可对和号与极限交换次序，我们有：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} |Y_i(t) - \pi_i| = 2 \sum_{i \in S} \lim_{t \rightarrow \infty} (\pi_i - Y_i(t))^+ = 0$$

这就证明了第一问：

$$P_\mu \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds - \pi_i \right| = 0 \right) = 1$$

第二部分：证明期望转移概率的 L^1 收敛

记随机变量 $Z_t = \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds - \pi_i \right|$ 。由第一部分的结论可知，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $Z_t \rightarrow 0$ 几乎处处成立。同时，利用三角不等式可以得到 Z_t 的一个绝对上界：

$$Z_t \leq \sum_{i \in S} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds + \sum_{i \in S} \pi_i = 1 + 1 = 2$$

因为 Z_t 几乎处处收敛到 0，且被一致有界，根据有界收敛定理，期望的极限等于极限的期望：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_\mu[Z_t] = E_\mu \left[\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t \right] = 0$$

现在考察第二问所要求极限的表达式内部。利用 Fubini 定理交换期望和积分的次序（因为被积函数非负有界），我们有：

$$\frac{1}{t} \int_0^t P_\mu(X_s = i) ds = E_\mu \left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} ds \right]$$

将其代入求和式，并利用绝对值函数的凸性 Jensen 不等式 $|E[X]| \leq E[|X|]$ ：

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t P_\mu(X_s = i) \, ds - \pi_i \right| &= \sum_{i \in S} \left| E_\mu \left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds - \pi_i \right] \right| \\ &\leq \sum_{i \in S} E_\mu \left[\left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds - \pi_i \right| \right] \\ &= E_\mu \left[\sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds - \pi_i \right| \right] \\ &= E_\mu[Z_t] \end{aligned}$$

由于前面已经证明了 $\lim_{t \rightarrow \infty} E_\mu[Z_t] = 0$ ，再由夹逼定理有：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t P_\mu(X_s = i) \, ds - \pi_i \right| = 0$$

□

4. 假设 \mathbf{Q} 不可约、正常返， π 为不变分布。证明：若 f 为 S 上的有界函数，则对任意初分布 μ ，

$$P_\mu \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) \, ds = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) \right) = 1$$

Proof. 因为状态空间 S 是可列集，我们可以将函数 $f(X_s)$ 用状态指示函数精确展开：

$$f(X_s) = \sum_{i \in S} f(i) \mathbf{1}_{\{X_s=i\}}$$

将其代入左侧的时间平均积分中，由于被积函数满足绝对收敛条件，积分与求和可以交换次序：

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) \, ds = \sum_{i \in S} f(i) \left(\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds \right)$$

我们考察该时间平均积分与目标期望值之间差的绝对值：

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) \, ds - \sum_{i \in S} \pi_i f(i) \right| = \left| \sum_{i \in S} f(i) \left(\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds - \pi_i \right) \right|$$

利用三角不等式，将绝对值放缩到求和号内部：

$$\leq \sum_{i \in S} |f(i)| \left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds - \pi_i \right|$$

由题意已知 f 是 S 上的有界函数，故存在常数 $M > 0$ ，使得对任意的 $i \in S$ 都有 $|f(i)| \leq M$ ，进行进一步放缩：

$$\leq M \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds - \pi_i \right|$$

根据第 3 题的结论，经验测度在 L^1 全变差意义下几乎处处收敛于不变测度 π ，即对任意初始分布 μ 有：

$$P_\mu \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}} \, ds - \pi_i \right| = 0 \right) = 1$$

这意味着，在概率为 1 的样本轨道 (a.s.) 上，当 $t \rightarrow \infty$ 时，上述放缩不等式最右端的无穷级数趋于 0。由于 M 是有限常数，整个上限必然趋于 0。根据夹逼定理，等式左端的绝对值也几乎处处趋于 0。这就严格证明了：

$$P_\mu \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) \, ds = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) \right) = 1$$

□

5. 假设同上。证明：若 $\sum_{i \in S} \pi_i |f(i)| < \infty$ ，则对任意初分布 μ ，上题中的结论仍成立。

Proof. 不妨固定初始状态 $X_0 = i$ 。为了利用强马氏性，我们将整个时间积分过程按照系统回访状态 i 的时刻进行分段。

定义第 k 个回访周期内的“报酬”与“绝对报酬”：

$$\xi_k = \int_{T_{i,k-1}}^{T_{i,k}} f(X_s) ds, \quad \eta_k = \int_{T_{i,k-1}}^{T_{i,k}} |f(X_s)| ds$$

其中 $T_{i,r}$ 为第 r 次回访状态 i 的绝对时刻。

对于任意时间 $t > 0$ ，设 $r = V_i(t)$ 为截止到时刻 t 访问状态 i 的总次数。则有 $T_{i,r} \leq t < T_{i,r+1}$ 。我们将 $[0, t]$ 上的时间平均积分拆分为两个部分：完整的 r 个周期，以及最后一个不完整的残余周期：

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_r}{t} + \frac{1}{t} \int_{T_{i,r}}^t f(X_s) ds$$

根据强马氏性，每次回访状态 i 后过程重新开始， ξ_1, ξ_2, \dots 是独立同分布的 (i.i.d.)。由强大数定律 (SLLN)：

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_r}{r} \xrightarrow{\text{a.s.}} E_i[\xi_1]$$

其中 $E_i[\xi_1]$ 是一个周期内的期望报酬：

$$E_i[\xi_1] = E_i \int_0^{\sigma_i} f(X_s) ds = \sum_{j \in S} f(j) E_i \int_0^{\sigma_i} \mathbf{1}_{\{X_s=j\}} ds = \sum_{j \in S} f(j) \mu_j$$

利用正常返马氏链不变分布的性质 $\pi_j = \frac{\mu_j}{E_i[\sigma_i]}$ ，上式化为：

$$E_i[\xi_1] = E_i[\sigma_i] \cdot \sum_{j \in S} \pi_j f(j)$$

同时，对于周期次数 r 与时间 t 的比值，由 $T_{i,r} \leq t < T_{i,r+1}$ 可得：

$$\frac{r}{T_{i,r+1}} \leq \frac{r}{t} \leq \frac{r}{T_{i,r}}$$

再次利用 SLLN，有 $\frac{T_{i,r}}{r} = \frac{\sigma_{i,1} + \cdots + \sigma_{i,r}}{r} \xrightarrow{\text{a.s.}} E_i[\sigma_i]$ 。根据夹逼定理，取其倒数可得：

$$\frac{r}{t} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1}{E_i[\sigma_i]}$$

将上述两部分极限相乘，我们得到完整周期部分的极限：

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_r}{t} = \left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_r}{r} \right) \cdot \left(\frac{r}{t} \right) \xrightarrow{\text{a.s.}} E_i[\sigma_i] \left(\sum_{j \in S} \pi_j f(j) \right) \cdot \frac{1}{E_i[\sigma_i]} = \sum_{j \in S} \pi_j f(j)$$

考察积分残余项的绝对值上界：

$$\left| \frac{1}{t} \int_{T_{i,r}}^t f(X_s) ds \right| \leq \frac{1}{t} \int_{T_{i,r}}^{T_{i,r+1}} |f(X_s)| ds = \frac{\eta_{r+1}}{t} \leq \frac{\eta_{r+1}}{r} \cdot \frac{r}{t}$$

假设函数 f 在不变分布下绝对可积，即 $\sum_{j \in S} \pi_j |f(j)| < \infty$ 。这意味着单周期内的绝对报酬期望 $E_i[\eta_1] = E_i[\sigma_i] \sum_{j \in S} \pi_j |f(j)| < \infty$ 。

对于均值有限的独立同分布非负随机变量序列 $\{\eta_k\}$ ，当 $r \rightarrow \infty$ 时，其通项与下标的比值必然几乎处处趋于 0，即 $\frac{\eta_{r+1}}{r} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 。

又因为 $\frac{r}{t}$ 趋于有限常数 $\frac{1}{E_i[\sigma_i]}$ ，故残余项的极限为 0：

$$\frac{1}{t} \int_{T_{i,r}}^t f(X_s) ds \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

将两部分极限相加，最终得到：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds = \sum_{j \in S} \pi_j f(j) \quad \text{a.s.}$$

即对初始状态 $X_0 = i$ 以概率 1 成立。由初分布 μ 的任意性，原式成立。 \square

6. 假设 Q 不可约、正常返, π 为其不变分布。证明: $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, i, j \in S$ 。(提示: 先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n\delta) = \pi_j$, 再利用定理 2.2.15。)

Proof. **第一步: 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n\delta) = \pi_j$**

对任意固定的 $\delta > 0$, 考虑离散时间随机过程 $Y_n = X_{n\delta} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 。根据连续时间马氏链的性质, $\{Y_n\}$ 构成一个离散时间马氏链 (即 X 的 δ -离散骨架), 其单步转移概率为:

$$P_i(Y_1 = j) = P_i(X_\delta = j) = p_{ij}(\delta)$$

因为 π 是连续时间马氏链 $\{X_t\}$ 的不变分布, 满足 $\pi P(t) = \pi (\forall t \geq 0)$, 所以自然有 $\pi P(\delta) = \pi$, 即:

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(\delta)$$

这说明 π 也是离散马氏链 $\{Y_n\}$ 的不变分布。此外, 由于 $p_{ii}(\delta) \geq e^{-q_i \delta} > 0$, 离散链 $\{Y_n\}$ 存在正的自环概率, 因此它是非周期的。同时它继承了不可约性和正常返性。根据离散时间马氏链的强遍历定理, 对于任意 $i, j \in S$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_i(Y_n = j) = \pi_j$$

即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n\delta) = \pi_j$$

第二步: 证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$

由定理 2.2.15 (连续可微性) 可知, 由于导数 $|p'_{ij}(t)| \leq 2q_i$, 转移概率 $p_{ij}(t)$ 关于时间 t 是一致连续的。即: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $t_1, t_2 \geq 0$, 当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 都有:

$$|p_{ij}(t_1) - p_{ij}(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

现在我们固定这个 δ 。根据第一步的结论, 对于这个特定的 δ , 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n\delta) = \pi_j$ 成立。因此, 必定存在一个正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有:

$$|p_{ij}(n\delta) - \pi_j| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对于任意的实数时间 $t > (N+1)\delta$, 我们可以找到一个唯一的整数 n_t , 使得 $n_t \delta \leq t < (n_t + 1)\delta$ 。显然, 由于 $t > (N+1)\delta$, 必然有 $n_t > N$ 。同时, 由于 t 落在以 $n_t \delta$ 为起点的长度为 δ 的区间内, 必然有 $|t - n_t \delta| < \delta$ 。

利用三角不等式, 我们将 $p_{ij}(t)$ 与 π_j 的偏差拆分为两部分:

$$\begin{aligned} |p_{ij}(t) - \pi_j| &= |p_{ij}(t) - p_{ij}(n_t \delta) + p_{ij}(n_t \delta) - \pi_j| \\ &\leq |p_{ij}(t) - p_{ij}(n_t \delta)| + |p_{ij}(n_t \delta) - \pi_j| \end{aligned}$$

根据一致连续性, 第一项 $|p_{ij}(t) - p_{ij}(n_t \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$; 根据离散极限的收敛性, 第二项 $|p_{ij}(n_t \delta) - \pi_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。因此:

$$|p_{ij}(t) - \pi_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

由于 ε 是任意选取的, 这就严格证明了当 $t \rightarrow \infty$ 时, 连续时间函数 $p_{ij}(t)$ 的极限为 π_j 。即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

□

7. 某系统由 n 个相互独立的部件构成。若所有部件都正常, 则系统处于工作状态; 若某个部件失效, 则其他部件停止工作, 且工人马上开始更换失效部件, 更换完成时系统随即进入工作状态。假设第 i 个部件的寿命服从 $\text{Exp}(\lambda_i)$, 更换时间服从 $\text{Exp}(\mu_i)$ 。

(1) 试用跳过程刻画该系统的运行。

(2) 求该系统处于工作状态的频率。

Proof. (1) **状态空间:** 定义状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 。其中:

- 状态 0 表示: 所有部件都正常, 系统处于工作状态。

- 状态 i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) 表示: 第 i 个部件失效, 系统处于更换部件 i 的状态 (此时其他部件停止工作, 不会发生新的损坏)。

转移速率矩阵 Q 的非零元素:

- **从状态 0 出发:** 系统在工作时, n 个部件都在消耗寿命, 且寿命服从指数分布并相互独立。第 i 个部件率先损坏的速率就是其寿命分布的参数 λ_i 。因此, 从状态 0 转移到状态 i 的速率为:

$$q_{0i} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

离开状态 0 的总速率为 $q_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, 故对角线元素 $q_{00} = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$ 。

- **从状态 i 出发 ($i \geq 1$):** 系统正在更换第 i 个部件, 更换时间服从参数为 μ_i 的指数分布。更换完成后系统马上回到工作状态 0。因此, 从状态 i 转移到状态 0 的速率为:

$$q_{i0} = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

离开状态 i 的总速率为 $q_i = \mu_i$, 故对角线元素 $q_{ii} = -\mu_i$ 。

- **其他转移速率:** 由于不存在从状态 i 直接转移到状态 j ($i, j \geq 1, i \neq j$) 的情况, 其余所有非对角线 $q_{ij} = 0$ 。

(2) 系统处于工作状态 (状态 0) 的长期频率, 正是该跳过程的平稳分布 (不变分布) $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ 中的 π_0 。

根据 $\pi Q = 0$ 。我们直接写出各个状态的流入速率等于流出速率的等式: 对于任意状态 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 流入该状态的只有状态 0, 流出该状态的也只有去往状态 0:

$$\pi_0 q_{0i} = \pi_i q_{i0}$$

代入具体的转移速率:

$$\pi_0 \lambda_i = \pi_i \mu_i$$

从而可以将所有的 π_i 用 π_0 表示出来:

$$\pi_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \pi_0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

再利用概率的归一性条件 $\sum_{j=0}^n \pi_j = 1$:

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^n \pi_i = 1$$

将上式代入:

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \pi_0 \right) = 1$$

由此解得系统处于工作状态的频率 (平稳概率) 为:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}$$

□

8. 设在 M/M/1 排队系统中顾客到达速率为 λ , 服务速率为 α 。当队伍长度为 n 时新来的顾客以概率 $(n+1)/(n+2)$ 加入等候的队伍, 以概率 $1/(n+2)$ 离开。试问:

- (1) 在什么条件下该系统有不变分布?
- (2) 在不变分布下, 平均队伍长度是多少?

Proof. (1) 该排队系统是一个典型的生灭过程。状态空间为系统中的顾客数 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。我们可以写出系统的状态转移速率:

- **出生率 (顾客加入队伍的速率):** 当队伍长度为 n 时, 新顾客以 λ 的速率到达, 并以 $\frac{n+1}{n+2}$ 的概率加入队伍, 故:

$$q_{n,n+1} = \lambda \frac{n+1}{n+2}, \quad n \geq 0$$

• **死亡率（服务完成的速率）**：只要系统中有顾客（ $n \geq 1$ ），服务台就以 α 的速率完成服务：

$$q_{n,n-1} = \alpha, \quad n \geq 1$$

设系统的不变分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ 。根据生灭过程的细致平稳条件 $\pi_n q_{n,n+1} = \pi_{n+1} q_{n+1,n}$ ，我们有：

$$\pi_{n+1} = \pi_n \frac{q_{n,n+1}}{q_{n+1,n}} = \pi_n \frac{\lambda \frac{n+1}{n+2}}{\alpha} = \pi_n \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right) \frac{n+1}{n+2}$$

递推展开，将所有 π_n 用 π_0 表示：

$$\begin{aligned} \pi_n &= \pi_{n-1} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right) \frac{n}{n+1} \\ &= \pi_{n-2} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \dots \\ &= \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^n \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 3 \cdots (n+1)} \\ &= \pi_0 \frac{1}{n+1} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^n \end{aligned}$$

系统存在不变分布的充要条件是所有的概率之和等于 1，考察级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^n$$

令 $\rho = \frac{\lambda}{\alpha}$ 。根据麦克劳林级数展开 $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ，当且仅当 $\rho < 1$ 时，该级数收敛，且：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n+1} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} = -\frac{1}{\rho} \ln(1-\rho) < \infty$$

因此，系统存在不变分布的条件是 $\rho = \frac{\lambda}{\alpha} < 1$ ，即：

$$\lambda < \alpha$$

(2)

已知当 $\lambda < \alpha$ 时，不变分布存在。由归一化条件解得 π_0 ：

$$\pi_0 = \frac{1}{-\frac{\lambda}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)} = -\frac{\lambda}{\alpha \ln\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)}$$

从而不变分布为：

$$\pi_n = \frac{\frac{1}{n+1} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n}{-\frac{\lambda}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)}, \quad n \geq 0$$

设 X_t 为系统中的队伍长度，其期望为：

$$E[X_t] = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \rho^n$$

先单独计算无穷级数求和部分：

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \rho^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \rho^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-\rho} - \left(-\frac{1}{\rho} \ln(1-\rho)\right) \\ &= \frac{1}{1-\rho} + \frac{\ln(1-\rho)}{\rho} \end{aligned}$$

将 $\pi_0 = \frac{1}{-\frac{1}{\rho} \ln(1-\rho)}$ 代入期望公式中:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \frac{\frac{1}{1-\rho} + \frac{\ln(1-\rho)}{\rho}}{-\frac{1}{\rho} \ln(1-\rho)} \\ &= \frac{-\rho}{(1-\rho) \ln(1-\rho)} - 1 \end{aligned}$$

最后, 将 $\rho = \frac{\lambda}{\alpha}$ 替换回原参数:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \frac{-\frac{\lambda}{\alpha}}{(1-\frac{\lambda}{\alpha}) \ln(1-\frac{\lambda}{\alpha})} - 1 \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda-\alpha) \ln(1-\frac{\lambda}{\alpha})} - 1 \end{aligned}$$

□

9. 试求 M/M/s 和 M/M/∞ 排队系统的不变分布。

Proof. 这两种排队系统都可以建模为状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 的生灭过程。设不变分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ 。根据细致平稳条件, 有 $\lambda_n \pi_n = \mu_{n+1} \pi_{n+1}$, 从而得到递推公式:

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad n \geq 1$$

第一部分: 求解 M/M/s 排队系统的不变分布

在 M/M/s 模型中, 有 s 个服务台。

- **到达率:** 顾客总是以恒定速率 λ 到达, 即 $\lambda_n = \lambda (n \geq 0)$ 。
- **服务率:** 当系统中人数 $n \leq s$ 时, 有 n 个服务台在工作, 总服务率为 $n\mu$; 当 $n > s$ 时, 所有 s 个服务台都在满负荷工作, 总服务率达到上限 $s\mu$ 。即:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s \\ s\mu, & n > s \end{cases}$$

代入递推公式求解 π_n 与 π_0 的关系:

- 当 $1 \leq n \leq s$ 时:

$$\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda \cdot \lambda \cdots \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdots n\mu} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0$$

- 当 $n > s$ 时:

$$\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda^n}{(\mu \cdot 2\mu \cdots s\mu) \cdot (s\mu \cdots s\mu)} = \frac{1}{s! s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} \pi_0$$

利用归一化条件 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$ 求解 π_0 :

$$1 = \sum_{n=0}^{s-1} \pi_n + \sum_{n=s}^{\infty} \pi_n = \pi_0 \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} \right]$$

考察后半部分的级数, 提取公因式 $\frac{\rho^s}{s!}$ 后, 它是一个首项为 1、公比为 $\frac{\rho}{s}$ 的等比级数:

$$\sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} = \frac{\rho^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{s}\right)^k$$

该无穷级数收敛的充要条件是公比严格小于 1, 即 $\frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ 。在此条件下, 级数求和为 $\frac{\rho^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho/s}$ 。因此得到 π_0 :

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!(1-\rho/s)} \right]^{-1}$$

因此, 当 $\lambda < s\mu$ 时系统存在不变分布, 其表达式为:

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \pi_0, & 0 \leq n \leq s \\ \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} \pi_0, & n > s \end{cases}$$

第二部分: 求解 M/M/∞ 排队系统的不变分布

在 M/M/∞ 模型中, 有无限个服务台, 这意味着每个到达的顾客都能立即得到服务而无需排队。

- **到达率:** $\lambda_n = \lambda (n \geq 0)$ 。
- **服务率:** 当系统中有 n 个顾客时, 必然有 n 个服务台同时在独立工作, 因此 $\mu_n = n\mu (n \geq 1)$ 。

代入递推公式求解 π_n 与 π_0 的关系: 对所有 $n \geq 1$:

$$\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda^n}{\mu \cdot 2\mu \cdots n\mu} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0$$

利用归一化条件 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$ 求解 π_0 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = \pi_0 e^\rho = 1$$

因此解得 $\pi_0 = e^{-\rho}$ 。将其代入 π_n 的表达式:

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad n \geq 0$$

因此, 对于 M/M/∞ 系统, 无论 λ 和 μ 取何正值, 无穷级数始终收敛, 系统永远存在不变分布。且该不变分布恰好是参数为 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 的泊松分布。 \square

10. 某理发店有一名理发师, 服务速率为 μ 。假设新顾客到达速率为 1, 并且 $\mu > 1$ 。

- (1) 假设新顾客看见理发师正在为其他顾客理发就随即离开。试问: 丢失的潜在顾客在全部顾客中的占比是多大?
- (2) 假设该理发店现在增设了 K 把椅子。新顾客到达时, 若没有其他顾客, 则新顾客马上理发; 若理发师正在为其他顾客理发且有空椅子, 则新顾客坐空椅子上等待, 否则新顾客随即离开。试问: 该理发店丢失的潜在顾客在全部顾客中的占比是多大?

Proof. 根据题意, 新顾客的到达是一个参数为 $\lambda = 1$ 的泊松过程, 理发师的服务时间服从参数为 μ 的指数分布, 且 $\mu > 1$ 。记系统中的顾客数 (包括正在理发和正在等待的顾客) 为状态 n 。由于到达是泊松过程, 根据泊松到达的时间平均性质, 顾客丢失的占比等于系统处于满载状态的平稳概率。

(1) 在这个系统中, 如果没有空闲的理发师, 顾客随即离开。因此系统容量为 1。状态空间为 $S = \{0, 1\}$ 。系统的状态转移速率为:

- 出生率: $q_{01} = \lambda = 1$
- 死亡率: $q_{10} = \mu$

设平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ 。根据细致平稳条件 $\pi_0 q_{01} = \pi_1 q_{10}$, 有:

$$\pi_0 \cdot 1 = \pi_1 \cdot \mu \implies \pi_1 = \frac{1}{\mu} \pi_0$$

利用归一化条件 $\pi_0 + \pi_1 = 1$:

$$\pi_0 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = 1 \implies \pi_0 = \frac{\mu}{\mu + 1}$$

系统处于满载 (状态 1) 的概率为:

$$\pi_1 = 1 - \pi_0 = \frac{1}{\mu + 1}$$

因此, 丢失的潜在顾客在全部顾客中的占比为 $\frac{1}{\mu + 1}$ 。

(2) 在这个系统中, 包含理发师的座位和 K 把等待椅子, 因此系统总容量为 $K + 1$ 。状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots, K + 1\}$ 。系统的状态转移速率为:

- 出生率：当系统未满时，新顾客加入，故 $q_{n,n+1} = \lambda = 1$ ($0 \leq n \leq K$)。
- 死亡率：只要系统中有顾客，理发师就在工作，故 $q_{n,n-1} = \mu$ ($1 \leq n \leq K+1$)。

设平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{K+1})$ 。根据细致平稳条件 $\pi_n q_{n,n+1} = \pi_{n+1} q_{n+1,n}$ ：

$$\pi_n \cdot 1 = \pi_{n+1} \cdot \mu \implies \pi_{n+1} = \frac{1}{\mu} \pi_n, \quad 0 \leq n \leq K$$

令 $\rho = \frac{1}{\mu}$ (由于 $\mu > 1$, 所以 $0 < \rho < 1$)。递推可得所有状态的概率与 π_0 的关系：

$$\pi_n = \rho^n \pi_0, \quad n = 0, 1, \dots, K+1$$

利用归一化条件 $\sum_{n=0}^{K+1} \pi_n = 1$ 求解 π_0 ：

$$\sum_{n=0}^{K+1} \rho^n \pi_0 = \pi_0 \frac{1 - \rho^{K+2}}{1 - \rho} = 1 \implies \pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+2}}$$

当系统处于状态 $K+1$ (满载) 时，新到达的顾客没有椅子坐，随即离开。因此丢失的占比就是 π_{K+1} ：

$$\pi_{K+1} = \rho^{K+1} \pi_0 = \frac{\rho^{K+1}(1 - \rho)}{1 - \rho^{K+2}}$$

为了得到更直观的表达式，我们将 $\rho = \frac{1}{\mu}$ 代回上式，并分子分母同乘 μ^{K+2} ：

$$\begin{aligned} \pi_{K+1} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^{K+1} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\mu}\right)^{K+2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\mu^{K+1}} - \frac{1}{\mu^{K+2}}}{1 - \frac{1}{\mu^{K+2}}} \\ &= \frac{\mu - 1}{\mu^{K+2} - 1} \end{aligned}$$

因此，增设 K 把椅子后，丢失的潜在顾客在全部顾客中的占比为 $\frac{\mu-1}{\mu^{K+2}-1}$ 。 □

11. 假设 $\{X_t\}$ 是不可约、正常返的跳过程，初分布为不变分布 π ； $\{S_n\}$ 是与之独立的泊松流，速率为 λ 。令 $S_0 = 0$ 。对任意 $n \geq 0$ ，令 $Y_n = X_{S_n}$ 。

- (1) 证明： $\{Y_n\}$ 是马氏链。
- (2) 试求 $\{Y_n\}$ 的转移概率 (用 $\{X_t\}$ 的转移概率表达)。
- (3) 验证 $\{Y_n\}$ 的初分布是不变分布。

Proof. (1) 对任意的时间步 $n \geq 0$ 和状态序列 $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ ，我们考察条件概率：

$$P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0)$$

根据定义，代入 $Y_n = X_{S_n}$ ：

$$= P(X_{S_{n+1}} = j \mid X_{S_n} = i, X_{S_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)$$

由于泊松流 $\{S_n\}$ 与跳过程 $\{X_t\}$ 相互独立，且泊松过程具有平稳独立增量特性，相邻两次跳跃的时间间隔 $\Delta S_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 服从参数为 λ 的指数分布，且独立于之前的跳跃时刻。再结合连续时间马氏链 $\{X_t\}$ 的强马氏性，已知时刻 S_n 的状态为 i 时，过程在未来时刻 S_{n+1} 的状态完全取决于当前状态 i 和经历的时间间隔 ΔS_{n+1} ，而与 S_n 之前的历史轨迹无关。因此：

$$\begin{aligned} P(X_{S_{n+1}} = j \mid X_{S_n} = i, X_{S_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) &= P(X_{S_{n+1}} = j \mid X_{S_n} = i) \\ &= P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) \end{aligned}$$

因此 $\{Y_n\}$ 满足马尔可夫性，即 $\{Y_n\}$ 是一条离散时间马氏链。

(2) 设 $\{Y_n\}$ 的单步转移概率为 $p_{ij} = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i)$ 。由时齐性，我们可以直接计算 $n = 0$ 时的转移概率：

$$p_{ij} = P(Y_1 = j | Y_0 = i) = P(X_{S_1} = j | X_0 = i)$$

由于 S_1 是泊松流的第一次事件发生时刻， $S_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ ，其概率密度函数为 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ($t \geq 0$)。利用全概率公式，对 S_1 的取值时间 t 进行连续条件展开：

$$p_{ij} = \int_0^{+\infty} P(X_{S_1} = j | X_0 = i, S_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

因为 $\{X_t\}$ 和 $\{S_n\}$ 独立， $P(X_{S_1} = j | X_0 = i, S_1 = t)$ 就是连续链在时间 t 的转移概率 $p_{ij}(t)$ ：

$$p_{ij} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} p_{ij}(t) dt$$

(3) 首先，由于 $S_0 = 0$ ， $Y_0 = X_0$ 。已知 $\{X_t\}$ 的初分布为不变分布 π ，因此 $\{Y_n\}$ 的初分布也显然是 π ：

$$P(Y_0 = j) = P(X_0 = j) = \pi_j$$

接下来我们需要验证 π 确实是离散马氏链 $\{Y_n\}$ 的不变分布，即要证明 $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$ 。已知 π 是连续链 $\{X_t\}$ 的不变分布，它满足：

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(t), \quad \forall t \geq 0$$

我们在等式两边同时乘以指数分布的密度函数 $\lambda e^{-\lambda t}$ ，并在 $[0, +\infty)$ 上对 t 积分：

$$\int_0^{+\infty} \pi_j \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(t) \right) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

等式左边， π_j 是与 t 无关的常数，且指数密度函数的积分为 1，所以左边等于 π_j 。等式右边，由于所有各项非负，根据 Fubini-Tonelli 定理，我们可以交换积分与无穷级数求和的次序：

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i \left(\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} p_{ij}(t) dt \right)$$

括号内的积分正是我们在第 (2) 问中求得的离散链的单步转移概率 p_{ij} 。代入即得：

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

这说明 π 满足离散马氏链 $\{Y_n\}$ 的全局平衡方程，因此初分布 π 也是 $\{Y_n\}$ 的不变分布。 □

2.5 逆过程与可逆分布

1. 证明：在例 2.5.4 中，当 $\lambda < \alpha, \beta$ 时，乘积测度 $\pi \times \mu := \{\pi_i \mu_j : (i, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+\}$ 是串联排队系统 $\{Z_t\}$ 的不变分布。

例 2.5.4 (串联排队系统)：假设系统中存在两个串联的服务项目。顾客以速率为 λ 的泊松流到达第一个队列，接受速率为 α 的服务；当顾客接受完第一项服务后，就排在第二个队列等待接受速率为 β 的第二项服务。将 t 时刻第一个和第二个队列的长度分别记为 X_t 和 Y_t ，记 $Z_t = (X_t, Y_t)$ 。那么 $\{Z_t\}$ 是状态空间为 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 的跳过程，转移速率如下：

$$\begin{cases} q(i, j)(i+1, j) = \lambda, & i, j \geq 0 \\ q(i, j)(i-1, j+1) = \alpha, & i \geq 1, j \geq 0 \\ q(i, j)(i, j-1) = \beta, & i \geq 0, j \geq 1 \end{cases}$$

对于独立的 M/M/1 模型，当到达率小于服务率时，存在不变分布。记这两个队列各自孤立时的不变分布为 π 和 μ ：

$$\begin{aligned} \pi_i &= \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^i \frac{\alpha - \lambda}{\alpha}, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \\ \mu_j &= \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^j \frac{\beta - \lambda}{\beta}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Proof. 记状态为 $(i, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 。令候选不变分布为 $\nu(i, j) = \pi_i \mu_j$ 。根据单个 M/M/1 队列的局部平衡性质，我们有以下四个基本递推关系式：

$$\begin{aligned}\pi_i \alpha &= \pi_{i-1} \lambda \quad (i \geq 1) \\ \pi_i \lambda &= \pi_{i+1} \alpha \quad (i \geq 0) \\ \mu_j \beta &= \mu_{j-1} \lambda \quad (j \geq 1) \\ \mu_j \lambda &= \mu_{j+1} \beta \quad (j \geq 0)\end{aligned}$$

要证明 ν 是不变分布，只需验证对任意状态 (i, j) ，全局平衡方程（即流入速率等于流出速率）均成立：

$$\sum_{(k,l) \neq (i,j)} \nu(k,l) q_{(k,l),(i,j)} = \nu(i,j) q_{(i,j)}$$

情形 1：一般状态 $i \geq 1, j \geq 1$

流出该状态的总速率为： $q_{(i,j)} = \lambda + \alpha + \beta$ 。流入该状态的总流量 (LHS) 包含三种可能：从 $(i-1, j)$ 到达，从 $(i+1, j-1)$ 第一台服务完，从 $(i, j+1)$ 第二台服务完。

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \nu(i-1, j) \lambda + \nu(i+1, j-1) \alpha + \nu(i, j+1) \beta \\ &= \pi_{i-1} \mu_j \lambda + \pi_{i+1} \mu_{j-1} \alpha + \pi_i \mu_{j+1} \beta\end{aligned}$$

利用前面的基本递推关系对每一项进行替换：

- 第一项： $(\pi_{i-1} \lambda) \mu_j = (\pi_i \alpha) \mu_j = \pi_i \mu_j \alpha$
- 第二项： $(\pi_{i+1} \alpha) \mu_{j-1} = (\pi_i \lambda) \mu_{j-1} = \pi_i (\mu_{j-1} \lambda) = \pi_i (\mu_j \beta) = \pi_i \mu_j \beta$
- 第三项： $\pi_i (\mu_{j+1} \beta) = \pi_i (\mu_j \lambda) = \pi_i \mu_j \lambda$

将这三项相加可得：

$$\text{LHS} = \pi_i \mu_j \alpha + \pi_i \mu_j \beta + \pi_i \mu_j \lambda = \pi_i \mu_j (\lambda + \alpha + \beta) = \nu(i, j) q_{(i,j)} = \text{RHS}$$

全局平衡方程成立。

情形 2：边界状态 $i = 0, j \geq 1$

流出速率为： $q_{(0,j)} = \lambda + \beta$ 。

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \nu(1, j-1) \alpha + \nu(0, j+1) \beta \\ &= \pi_1 \mu_{j-1} \alpha + \pi_0 \mu_{j+1} \beta \\ &= (\pi_1 \alpha) \mu_{j-1} + \pi_0 (\mu_{j+1} \beta) \\ &= (\pi_0 \lambda) \mu_{j-1} + \pi_0 (\mu_j \lambda) \\ &= \pi_0 (\mu_{j-1} \lambda) + \pi_0 \mu_j \lambda \\ &= \pi_0 (\mu_j \beta) + \pi_0 \mu_j \lambda = \pi_0 \mu_j (\lambda + \beta) = \nu(0, j) q_{(0,j)} = \text{RHS}\end{aligned}$$

情形 3：边界状态 $i \geq 1, j = 0$

流出速率为： $q_{(i,0)} = \lambda + \alpha$ 。

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \nu(i-1, 0) \lambda + \nu(i, 1) \beta \\ &= \pi_{i-1} \mu_0 \lambda + \pi_i \mu_1 \beta \\ &= (\pi_{i-1} \lambda) \mu_0 + \pi_i (\mu_1 \beta) \\ &= (\pi_i \alpha) \mu_0 + \pi_i (\mu_0 \lambda) = \pi_i \mu_0 (\lambda + \alpha) = \nu(i, 0) q_{(i,0)} = \text{RHS}\end{aligned}$$

情形 4：边界状态 $i = 0, j = 0$

流出速率为： $q_{(0,0)} = \lambda$ 。

$$\text{LHS} = \nu(0, 1) \beta = \pi_0 \mu_1 \beta = \pi_0 (\mu_0 \lambda) = \pi_0 \mu_0 \lambda = \nu(0, 0) q_{(0,0)} = \text{RHS}$$

综上所述，乘积测度 $\nu(i, j) = \pi_i \mu_j$ 在所有状态下均满足全局平衡方程。此外，由于 $\lambda < \alpha, \beta$ ，分布归一化条件成立：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \nu(i, j) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \right) = 1 \times 1 = 1$$

根据不可约马氏链的性质，存在平稳概率分布即蕴含过程是正常返的。因此， $\pi \times \mu$ 确实是该串联排队系统的不变分布。□

2.6 连续时间马氏链

1*. 证明: 在例 2.6.1 中, 对任意 $i \in S$, $\hat{G}_{ii} \leq M$. (提示: 假设 $\{\tilde{X}_n\}$ 是 \mathbb{Z} 上的马氏链, 转移概率为: 对任意 $i \in \mathbb{Z}$, $\tilde{p}_{i,i+1} = 2/3$, $\tilde{p}_{i,i-1} = 1/3$. 将其格林函数记为 \tilde{G}_{ij} , 那么可取 $M = \tilde{G}_{00}$.)

例 2.6.1: 取状态空间 $S = \mathbb{Z}_+$, 考虑连续时间马氏链, 其转移速率为:

$$q_{i,i+1} = 2 \times 3^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad q_{i,i-1} = 3^i, \quad i = 1, 2, \dots$$

则其嵌入链 $\{\hat{X}_n\}$ 的转移概率为:

$$\hat{p}_{01} = 1, \quad \hat{p}_{i,i+1} = \frac{2}{3}, \quad \hat{p}_{i,i-1} = \frac{1}{3} \quad (i \geq 1)$$

记 \hat{G}_{ij} 为该嵌入链 $\{\hat{X}_n\}$ 的格林函数 (即从 i 出发访问 j 的期望次数).

Proof. 根据格林函数 (Green's function) 的物理意义, 从状态 i 出发访问状态 j 的期望次数为 G_{ij} . 特别地, 对于对角线元素, 有 $G_{ii} = \frac{1}{1-f_{ii}}$, 其中 f_{ii} 是从 i 出发最终能回到 i 的首中概率 (即返回概率).

已知 $\{\tilde{X}_n\}$ 是 \mathbb{Z} 上的随机游动, 向右概率 $p = \tilde{p}_{i,i+1} = 2/3$, 向左概率 $q = \tilde{p}_{i,i-1} = 1/3$. 由于 $p > q$, 该游动具有向右的正漂移 (Transient to $+\infty$).

由非对称简单随机游动的经典结论, 从状态 x 出发, 首中左侧状态 y ($y < x$) 的概率为 $(q/p)^{x-y} = (1/2)^{x-y}$. 而从状态 x 出发, 首中右侧状态 y ($y > x$) 的概率为 1 (首步分析法解等比数列差分方程可得).

对于 $\{\tilde{X}_n\}$, 从 0 出发返回 0 的概率为:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{00} &= p \cdot P(\text{从 } 1 \text{ 首次到达 } 0) + q \cdot P(\text{从 } -1 \text{ 首次到达 } 0) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-0} + \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

因此, 提示中所指的常数 $M = \tilde{G}_{00} = \frac{1}{1-\tilde{f}_{00}} = \frac{1}{1-2/3} = 3$. 由于空间平移不变性, 对任意 $i \in \mathbb{Z}$, $\tilde{G}_{ii} = 3$.

嵌入链 $\{\hat{X}_n\}$ 是状态空间 \mathbb{Z}_+ 上的随机游动, 在 $i \geq 1$ 时转移概率与 $\{\tilde{X}_n\}$ 完全相同, 唯一的区别在于 0 处有反射边界 $\hat{p}_{01} = 1$. 我们同样通过计算返回概率 \hat{f}_{ii} 来分析 \hat{G}_{ii} .

情形 1: 当 $i \geq 1$ 时

$$\begin{aligned} \hat{f}_{ii} &= \hat{p}_{i,i+1} \cdot P(\text{在 } \hat{X}_n \text{ 中从 } i+1 \text{ 首次到达 } i) + \hat{p}_{i,i-1} \cdot P(\text{在 } \hat{X}_n \text{ 中从 } i-1 \text{ 首次到达 } i) \\ &= \frac{2}{3} \hat{f}_{i+1,i} + \frac{1}{3} \hat{f}_{i-1,i} \end{aligned}$$

- 对于 $\hat{f}_{i+1,i}$: 由于从 $i+1$ 走到 i 的任何路径都不会越过 i 且 $i \geq 1$, 这意味着粒子在到达 i 之前, 绝对不会触碰到边界 0. 因此, 边界在此过程中完全失效, 该概率与无界游动完全一致, 即 $\hat{f}_{i+1,i} = \tilde{f}_{i+1,i} = 1/2$.
- 对于 $\hat{f}_{i-1,i}$: 因为 $\{\hat{X}_n\}$ 在 \mathbb{Z}_+ 上不可约, 且正向概率大于反向概率 (带有 0 处向右的反射), 粒子以概率 1 趋于 $+\infty$. 因此从左向右到达任何状态的概率必为 1, 即 $\hat{f}_{i-1,i} = 1$.

代入可得: $\hat{f}_{ii} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$. 此时 $\hat{G}_{ii} = \frac{1}{1-\hat{f}_{ii}} = 3 = M$.

情形 2: 当 $i = 0$ 时

$$\hat{f}_{00} = \hat{p}_{01} \cdot \hat{f}_{10} = 1 \cdot \hat{f}_{10}$$

同理, 从 1 到 0 的路径在命中 0 之前不会触发 0 处的反射边界, 故 $\hat{f}_{10} = \tilde{f}_{10} = 1/2$. 则 $\hat{f}_{00} = 1/2$. 此时 $\hat{G}_{00} = \frac{1}{1-\hat{f}_{00}} = 2 < M$.

综上所述, 对任意 $i \in S$, 都有 $\hat{G}_{ii} \leq 3 = M$ 成立. 证明完毕. \square

3 布朗运动

3.1 高斯分布与高斯过程

1. 假设 $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 服从 n 维高斯分布。证明：

- (1) 存在服从 n 维标准正态分布的随机向量 $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ 和 $n \times n$ 矩阵 M ，使得 $\vec{X} = M\vec{Z}$ 。
- (2) 对任意 $m \times n$ 矩阵 M ， $M\vec{X}$ 服从 m 维高斯分布。

Proof. 不失一般性，记 \vec{X} 的均值向量为 $\vec{\mu}$ ，协方差矩阵为 Σ 。其特征函数为：

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{t}) = \exp\left(it^T \vec{\mu} - \frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma \vec{t}\right), \quad \forall \vec{t} \in \mathbb{R}^n$$

(1) 因为 Σ 是协方差矩阵，故它是对称半正定矩阵。根据矩阵分解定理，存在非负对角阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 和正交矩阵 U ，使得 $\Sigma = U\Lambda U^T$ 。令 $M = U\Lambda^{1/2}$ ，则 $MM^T = \Sigma$ 。构造 n 维标准正态分布随机向量 $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T \sim N(\vec{0}, I_n)$ ，令 $\vec{Y} = M\vec{Z} + \vec{\mu}$ 。计算 \vec{Y} 的特征函数：

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{Y}}(\vec{t}) &= E[\exp(it^T (M\vec{Z} + \vec{\mu}))] \\ &= \exp(it^T \vec{\mu}) E[\exp(i(M^T \vec{t})^T \vec{Z})] \\ &= \exp(it^T \vec{\mu}) \exp\left(-\frac{1}{2} (M^T \vec{t})^T I_n (M^T \vec{t})\right) \\ &= \exp\left(it^T \vec{\mu} - \frac{1}{2} \vec{t}^T (MM^T) \vec{t}\right) = \varphi_{\vec{X}}(\vec{t}) \end{aligned}$$

由于特征函数唯一决定概率分布，故 $\vec{X} \stackrel{d}{=} M\vec{Z} + \vec{\mu}$ 。（注：若题意限定 \vec{X} 为中心化高斯向量，则 $\vec{\mu} = \vec{0}$ ，直接有 $\vec{X} \stackrel{d}{=} M\vec{Z}$ 。）

(2) 对任意 $m \times n$ 矩阵 A （为避免与 (1) 中符号冲突，此处用 A 代替 M ），考察随机向量 $\vec{Y} = A\vec{X}$ 的特征函数：对于任意 $\vec{s} \in \mathbb{R}^m$ ，

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{Y}}(\vec{s}) &= E[\exp(i\vec{s}^T A\vec{X})] = E[\exp(i(A^T \vec{s})^T \vec{X})] \\ &= \varphi_{\vec{X}}(A^T \vec{s}) \\ &= \exp\left(i(A^T \vec{s})^T \vec{\mu} - \frac{1}{2} (A^T \vec{s})^T \Sigma (A^T \vec{s})\right) \\ &= \exp\left(i\vec{s}^T (A\vec{\mu}) - \frac{1}{2} \vec{s}^T (A\Sigma A^T) \vec{s}\right) \end{aligned}$$

这正是均值为 $A\vec{\mu}$ 、协方差矩阵为 $A\Sigma A^T$ 的 m 维高斯分布的特征函数。因此 $A\vec{X}$ 服从 m 维高斯分布。 \square

2. 证明命题 3.1.2 与命题 3.1.3。

命题 3.1.2 假设 $\vec{X} = \{X_\alpha : \alpha \in I\}$ 是高斯系， I_1, \dots, I_n 是 I 的互不相交的非空子集。记 $\vec{X}_r = \{X_\alpha : \alpha \in I_r\}, r = 1, \dots, n$ 。若对任意 $r \neq s$ ，

$$\text{Cov}(X_\alpha, X_\beta) = 0, \quad \forall \alpha \in I_r, \beta \in I_s,$$

则 $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ 相互独立。

命题 3.1.3 假设 $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ 是高斯系， J 是指标集。若对任意 $\beta \in J$ ，存在 $n \geq 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ 以及 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ，使得

$$Y_\beta = c_1 X_{\alpha_1} + \dots + c_n X_{\alpha_n},$$

则 $\{Y_\beta : \beta \in J\}$ 是高斯系。

Proof. **命题 3.1.2:** 要证明随机向量族 $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ 相互独立，等价于证明它们中任意有限维子向量的联合特征函数等于边缘特征函数的乘积。任取有限维子向量 $\vec{Y}_r \subset \vec{X}_r (r = 1, \dots, n)$ ，记 $\vec{Y} = (\vec{Y}_1^T, \dots, \vec{Y}_n^T)^T$ 。由于 $\{X_\alpha\}$ 是

高斯系, \vec{Y} 是一个高斯向量。已知对任意 $r \neq s$, $\text{Cov}(X_\alpha, X_\beta) = 0$, 这意味着 \vec{Y} 的协方差矩阵 $\Sigma_{\vec{Y}}$ 是一个分块对角矩阵: $\Sigma_{\vec{Y}} = \text{diag}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$, 其中 Σ_r 是 \vec{Y}_r 的协方差矩阵。因此, \vec{Y} 的特征函数可以分解为:

$$\begin{aligned}\varphi_{\vec{Y}}(\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_n) &= \exp\left(i \sum_{r=1}^n \vec{t}_r^T \vec{\mu}_r - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \vec{t}_r^T \Sigma_r \vec{t}_r\right) \\ &= \prod_{r=1}^n \exp\left(i \vec{t}_r^T \vec{\mu}_r - \frac{1}{2} \vec{t}_r^T \Sigma_r \vec{t}_r\right) = \prod_{r=1}^n \varphi_{\vec{Y}_r}(\vec{t}_r)\end{aligned}$$

联合特征函数等于边缘特征函数之积, 故 $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ 相互独立。

命题 3.1.3: 根据定义, 一个随机变量族是高斯系, 当且仅当其任意有限个元素的线性组合都是一维高斯 (正态) 随机变量。任取 $\{Y_\beta : \beta \in J\}$ 中的有限个元素 $Y_{\beta_1}, \dots, Y_{\beta_m}$, 并取任意常数 $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ 。考察它们的线性组合:

$$Z = \sum_{k=1}^m d_k Y_{\beta_k}$$

由题设, Y_{β_k} 是 $\{X_\alpha\}$ 中有限个元素的线性组合。因此 Z 本质上依然是 $\{X_\alpha\}$ 中有限个元素的线性组合。由于 $\{X_\alpha\}$ 是高斯系, 它的任何有限线性组合都是一维高斯分布。因此 Z 是一维高斯分布。这就证明了 $\{Y_\beta : \beta \in J\}$ 满足高斯系的定义。 \square

3. 假设 $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ 是一列 d 维高斯向量, 且对任意 $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\vec{X}_n}(\vec{t})$ 存在且有限, 将此极限记为 $f(\vec{t})$ 。证明: $f(\vec{t})$ 是某 d 维高斯向量的特征函数。

Proof. 设 d 维高斯向量 $\vec{X}_n \sim N(\vec{\mu}_n, \Sigma_n)$, 其特征函数为 $f_{\vec{X}_n}(\vec{t}) = \exp(i\vec{t}^T \vec{\mu}_n - \frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma_n \vec{t})$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\vec{X}_n}(\vec{t}) = f(\vec{t})$ 存在且有限。

首先, 考察特征函数的模长:

$$|f_{\vec{X}_n}(\vec{t})| = \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma_n \vec{t}\right)$$

由于 $f_{\vec{X}_n}(\vec{t})$ 收敛, 其模长也必然收敛。因此, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{t}^T \Sigma_n \vec{t} := Q(\vec{t})$ 存在。由于 Σ_n 是一系列对称半正定矩阵的二次型, 由极化恒等式可知, 二次型逐点收敛意味着矩阵的逐元素收敛。即存在对称半正定矩阵 Σ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \Sigma$, 且 $Q(\vec{t}) = \vec{t}^T \Sigma \vec{t}$ 。从而有 $|f(\vec{t})| = \exp(-\frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma \vec{t}) > 0$ 对任意 \vec{t} 成立。

其次, 考察特征函数的辐角部分。由于 $f_{\vec{X}_n}(\vec{t})$ 收敛且其极限处处不为零, 我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(i\vec{t}^T \vec{\mu}_n) = \frac{f(\vec{t})}{|f(\vec{t})|} \quad \text{存在}$$

这要求 $i\vec{t}^T \vec{\mu}_n$ 在模 2π 意义下收敛。为了保证其在整个 \mathbb{R}^d 空间对所有 \vec{t} 都有良好的线性收敛性, 均值向量序列 $\{\vec{\mu}_n\}$ 必须收敛到某个常向量 $\vec{\mu}$ (否则在局部邻域内无法保持连续性, 与极限分布的性质矛盾)。

因此, 极限函数可以写为:

$$f(\vec{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(i\vec{t}^T \vec{\mu}_n - \frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma_n \vec{t}\right) = \exp\left(i\vec{t}^T \vec{\mu} - \frac{1}{2} \vec{t}^T \Sigma \vec{t}\right)$$

这恰好是服从 $N(\vec{\mu}, \Sigma)$ 的 d 维高斯向量的特征函数。证明完毕。 \square

3.2 布朗运动的定义与莱维构造

假设 $\{B_t\}$ 是一维标准布朗运动。

1. 对任意正整数 n , 求 $B_1 + B_2 + \dots + B_n$ 的分布。

Proof. 令 $S = \sum_{k=1}^n B_k$ 。由于 $\{B_t\}$ 是高斯过程, S 作为高斯过程的有限线性组合, 必然服从一维高斯分布。因此, 我们只需要计算 S 的均值和方差。

• **均值:** $E[S] = \sum_{k=1}^n E[B_k] = 0$ 。

• 方差:

$$\text{Var}(S) = \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n B_i, \sum_{j=1}^n B_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(B_i, B_j)$$

对于标准布朗运动, $\text{Cov}(B_i, B_j) = \min(i, j)$ 。我们可以将这个双重求和表示为一个对称矩阵所有元素之和。当 $i = j$ 时, 对角线元素之和为 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 。当 $i < j$ 时, 非对角线元素 (上三角) 之和为 $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n i = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2$ 。

$$\begin{aligned} \text{上三角和} &= n \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)}{6} [3n - (2n-1)] = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

所以总方差为对角线加两倍的的上三角:

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \frac{n(n+1)}{2} + 2 \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} [3 + 2(n-1)] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

这也可以直接利用平方和公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 得到, 因为 $\sum_{i,j} \min(i, j) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k (2m-1) = \sum_{k=1}^n k^2$

综上, $B_1 + \dots + B_n \sim N \left(0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$ 。 □

2. 设 $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, 计算 $E(B_{t_1} B_{t_2} B_{t_3} B_{t_4})$ 。

Proof. 本题可以利用独立增量将乘积拆解。记增量 $\Delta_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ (约定 $t_0 = 0, B_0 = 0$), 这些增量相互独立, 且 $\Delta_k \sim N(0, t_k - t_{k-1})$ 。我们将原式展开为增量的形式:

$$\begin{aligned} B_{t_1} B_{t_2} B_{t_3} B_{t_4} &= \Delta_1 (\Delta_1 + \Delta_2) (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) \end{aligned}$$

由于独立增量的期望为 0, 即对任意 k , $E[\Delta_k] = 0$, 且任意不同增量的乘积期望也为 0。展开上述乘积并取期望时, 只有含有偶数次幂的项才会保留, 由于总共是 4 次, 所以只有二次二次的交叉项或者四次项。特别地, Δ_4 只出现在最后一项中, 所以包含 Δ_4 的所有展开项取期望都为 0。

$$E[B_{t_1} B_{t_2} B_{t_3} B_{t_4}] = E[B_{t_1} B_{t_2} B_{t_3} (B_{t_4} - B_{t_3} + B_{t_3})] = E[B_{t_1} B_{t_2} B_{t_3}^2]$$

继续将 B_{t_3} 拆分为 $B_{t_2} + (B_{t_3} - B_{t_2})$:

$$\begin{aligned} E[B_{t_1} B_{t_2} B_{t_3}^2] &= E[B_{t_1} B_{t_2} (B_{t_2} + \Delta_3)^2] \\ &= E[B_{t_1} B_{t_2} (B_{t_2}^2 + 2B_{t_2} \Delta_3 + \Delta_3^2)] \\ &= E[B_{t_1} B_{t_2}^3] + E[B_{t_1} B_{t_2}] E[\Delta_3^2] \quad (\text{因为 } \Delta_3 \text{ 与 } B_{t_1}, B_{t_2} \text{ 独立}) \\ &= E[B_{t_1} (B_{t_1} + \Delta_2)^3] + \min(t_1, t_2) (t_3 - t_2) \end{aligned}$$

对于 $E[B_{t_1} (B_{t_1} + \Delta_2)^3]$:

$$\begin{aligned} E[B_{t_1} (B_{t_1}^3 + 3B_{t_1}^2 \Delta_2 + 3B_{t_1} \Delta_2^2 + \Delta_2^3)] &= E[B_{t_1}^4] + 3E[B_{t_1}^2] E[\Delta_2^2] \\ &= 3t_1^2 + 3t_1(t_2 - t_1) \\ &= 3t_1 t_2 \end{aligned}$$

这里用到了标准正态变量 Z 的四阶矩 $E[Z^4] = 3\sigma^4$ 。

将各部分组合:

$$E(B_{t_1} B_{t_2} B_{t_3} B_{t_4}) = 3t_1 t_2 + t_1(t_3 - t_2) = 2t_1 t_2 + t_1 t_3$$

□

3. 设 $s > t > 0$, 试求:

(1) $E(B_s^2 - s \mid B_t = x)$;

(2) $E(B_s^3 - 3sB_s \mid B_t = x)$;

(3) $E(B_s^4 - 6sB_s^2 + 3s^2 \mid B_t = x)$. (注: 对比 §1.7 习题 12.)

Proof. 因为 $s > t$, 我们可以将 B_s 分解为 $B_t + (B_s - B_t)$ 。根据布朗运动的性质, 增量 $\Delta = B_s - B_t$ 独立于 $\sigma(B_u : u \leq t)$, 因此独立于 B_t , 且 $\Delta \sim N(0, s - t)$ 。所以在给定 $B_t = x$ 的条件下, $B_s \sim N(x, s - t)$ 。令条件随机变量 $Y = (B_s \mid B_t = x)$, 则 $Y \sim N(x, s - t)$ 。

(1)

$$\begin{aligned} E[B_s^2 - s \mid B_t = x] &= E[Y^2] - s = (\text{Var}(Y) + (E[Y])^2) - s \\ &= (s - t) + x^2 - s \\ &= x^2 - t \end{aligned}$$

(2)

$$E[B_s^3 - 3sB_s \mid B_t = x] = E[Y^3] - 3sE[Y]$$

已知正态分布 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的三阶中心矩为 0, 即 $E[(Y - \mu)^3] = 0$, 展开得 $E[Y^3] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$ 。

$$\begin{aligned} E[B_s^3 - 3sB_s \mid B_t = x] &= (x^3 + 3x(s - t)) - 3sx \\ &= x^3 + 3xs - 3xt - 3sx \\ &= x^3 - 3tx \end{aligned}$$

(3)

$$E[B_s^4 - 6sB_s^2 + 3s^2 \mid B_t = x] = E[Y^4] - 6sE[Y^2] + 3s^2$$

已知正态分布的四阶中心矩 $E[(Y - \mu)^4] = 3\sigma^4$, 展开得 $E[Y^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$ 。

$$\begin{aligned} E[B_s^4 - 6sB_s^2 + 3s^2 \mid B_t = x] &= (x^4 + 6x^2(s - t) + 3(s - t)^2) - 6s(x^2 + s - t) + 3s^2 \\ &= x^4 + 6x^2s - 6x^2t + 3s^2 - 6st + 3t^2 - 6sx^2 - 6s^2 + 6st + 3s^2 \\ &= x^4 - 6tx^2 + 3t^2 \end{aligned}$$

□

4. 设 $0 < s < t$, 试证:

$$P(B_s > 0, B_t > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Proof. 由于 $0 < s < t$, (B_s, B_t) 是一个二维零均值高斯向量。其方差分别为 $\sigma_s^2 = s, \sigma_t^2 = t$, 协方差为 $\text{Cov}(B_s, B_t) = s$ 。因此, 相关系数为:

$$\rho = \frac{\text{Cov}(B_s, B_t)}{\sigma_s \sigma_t} = \frac{s}{\sqrt{s}\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{s}{t}}$$

对于任意二维标准正态向量 (X, Y) , 若其相关系数为 ρ , 则其落在第一象限的概率为已知的经典结果 (Sheppard 公式):

$$P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin(\rho)$$

直接将 $\rho = \sqrt{\frac{s}{t}}$ 代入该公式, 即得:

$$P(B_s > 0, B_t > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}$$

□

5. 考虑 d 维标准布朗运动, 记 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d), \vec{y} = (y_1, \dots, y_d)$.

(1) 证明: 转移密度有如下表达式:

$$p_t(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{i=1}^d p_t(x_i, y_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^d \frac{(y_i - x_i)^2}{2t} \right\},$$

(2) 记 $G(\vec{x}, \vec{y}) := \int_0^\infty p_t(\vec{x}, \vec{y}) dt$, 并称其为格林函数. 证明: 对 $d \geq 2, G(\vec{x}, \vec{y}) = \infty$; 对 $d \geq 3$,

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{2\pi^{d/2}} \cdot \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^{d-2}}.$$

(注: 忽略前面的系数, 格林函数正是物理中的牛顿位势.)

Proof. (1) 转移密度证明: d 维标准布朗运动 $\vec{B}_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$ 的各个分量是相互独立的一维标准布朗运动. 因此, 在给定 $\vec{B}_0 = \vec{x}$ 的条件下, \vec{B}_t 到达 \vec{y} 的联合概率密度函数, 等于各个分量边缘转移密度的乘积. 一维布朗运动的转移密度为:

$$p_t(x_i, y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{(y_i - x_i)^2}{2t} \right)$$

连乘即得:

$$\begin{aligned} p_t(\vec{x}, \vec{y}) &= \prod_{i=1}^d p_t(x_i, y_i) = \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{(y_i - x_i)^2}{2t} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^d \exp \left(-\sum_{i=1}^d \frac{(y_i - x_i)^2}{2t} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp \left(-\frac{\|\vec{y} - \vec{x}\|^2}{2t} \right) \end{aligned}$$

(2) 格林函数证明: 根据定义, $G(\vec{x}, \vec{y}) = \int_0^\infty p_t(\vec{x}, \vec{y}) dt$. 记 $r = \|\vec{y} - \vec{x}\|$.

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp \left(-\frac{r^2}{2t} \right) dt$$

当 $d = 1$ 或 $d = 2$ 时, 随着 $t \rightarrow \infty$, 被积函数分别表现为 $t^{-1/2}$ 和 t^{-1} 量级. 由于 $\int_1^\infty t^{-\alpha} dt$ 在 $\alpha \leq 1$ 时发散, 因此对于 $d \leq 2$, 该积分发散, 即 $G(\vec{x}, \vec{y}) = \infty$. 这与 $d \leq 2$ 时布朗运动是正常返的事实相对应 (期望访问次数无穷大).

当 $d \geq 3$ 时, 被积函数在无穷远处收敛. 我们进行变量代换计算该积分. 令 $u = \frac{r^2}{2t}$, 则 $t = \frac{r^2}{2u}$, $dt = -\frac{r^2}{2u^2} du$. 当 $t \rightarrow 0$ 时 $u \rightarrow \infty$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $u \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{y}) &= \int_\infty^0 \frac{1}{(2\pi \frac{r^2}{2u})^{d/2}} e^{-u} \left(-\frac{r^2}{2u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \left(\frac{2u}{r^2} \right)^{d/2} \frac{r^2}{2u^2} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \frac{2^{d/2-1}}{r^{d-2}} \int_0^\infty u^{d/2-2} e^{-u} du \end{aligned}$$

根据伽马函数的定义 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, 后面的积分为 $\Gamma(d/2 - 1)$. 整理系数:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{2^{d/2-1}}{2^{d/2}\pi^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \frac{1}{r^{d-2}} \\ &= \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{2\pi^{d/2}} \frac{1}{\|\vec{y} - \vec{x}\|^{d-2}} \end{aligned}$$

□

6. 验证布朗运动的转移密度满足如下偏微分方程:

$$\frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial y_i^2}.$$

Proof. 已知 n 维布朗运动的转移密度函数为:

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2t}\right) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(x_j - y_j)^2}{2t}\right)$$

我们先计算等式左边关于时间 t 的偏导数。对 $\ln p_t(x, y)$ 求导会更方便:

$$\ln p_t(x, y) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi t) - \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - y_j)^2}{2t}$$

对 t 求偏导:

$$\frac{1}{p_t(x, y)} \frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} = -\frac{n}{2t} + \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - y_j)^2}{2t^2}$$

所以,

$$\frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} = p_t(x, y) \left[\sum_{j=1}^n \frac{(x_j - y_j)^2}{2t^2} - \frac{n}{2t} \right]$$

接下来计算等式右边关于空间变量 x_i 的二阶偏导数。先求一阶偏导:

$$\frac{\partial p_t(x, y)}{\partial x_i} = p_t(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{(x_i - y_i)^2}{2t} \right) = -p_t(x, y) \frac{x_i - y_i}{t}$$

再求二阶偏导 (利用乘积法则):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial p_t(x, y)}{\partial x_i} \left(-\frac{x_i - y_i}{t} \right) + p_t(x, y) \left(-\frac{1}{t} \right) \\ &= p_t(x, y) \frac{(x_i - y_i)^2}{t^2} - \frac{p_t(x, y)}{t} \end{aligned}$$

对所有 $i = 1, \dots, n$ 求和并乘以 $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[p_t(x, y) \frac{(x_i - y_i)^2}{t^2} - \frac{p_t(x, y)}{t} \right] \\ &= p_t(x, y) \left[\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{2t^2} - \frac{n}{2t} \right] \end{aligned}$$

比较两端计算结果, 显然有 $\frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial x_i^2}$ 。

由于函数 $p_t(x, y)$ 中 x 和 y 是完全对称的 (即依赖于 $(x_i - y_i)^2$), 对 y_i 求偏导的计算过程和结果与对 x_i 求偏导完全一致, 因此第二个等号 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial y_i^2}$ 自然成立。□

7. 设 $\{W_t\}$ 是标准布朗运动, 且与 $\{B_t\}$ 相互独立。

- (1) 设 $\xi_t = aB_t + bW_t$, 若 $\{\xi_t\}$ 也是标准布朗运动, 那么 a 和 b 应满足什么条件?
- (2) 对任意 $t \geq 0$, 令 $\eta_t = B_{2t} - B_t$, $\{\eta_t\}$ 是标准布朗运动吗? 试证明你的结论。

Proof. 要证明一个过程是标准布朗运动, 只需验证它是连续的、均值为 0, 且协方差函数为 $\min(s, t)$ 的高斯过程。

(1) 因为 $\{B_t\}$ 和 $\{W_t\}$ 都是连续的高斯过程且相互独立, 所以 $\xi_t = aB_t + bW_t$ 是两个连续高斯过程的线性组合, 必然也是几乎处处连续的高斯过程。均值为: $E[\xi_t] = aE[B_t] + bE[W_t] = 0$ 。要使 $\{\xi_t\}$ 成为标准布朗运动, 必须满足其协方差函数 $\text{Cov}(\xi_s, \xi_t) = \min(s, t)$ 。计算其协方差:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\xi_s, \xi_t) &= \text{Cov}(aB_s + bW_s, aB_t + bW_t) \\ &= a^2\text{Cov}(B_s, B_t) + b^2\text{Cov}(W_s, W_t) \quad (\text{交叉项由独立性为 } 0) \\ &= a^2 \min(s, t) + b^2 \min(s, t) \\ &= (a^2 + b^2) \min(s, t)\end{aligned}$$

因此, 必须满足的条件是 $a^2 + b^2 = 1$ 。

(2) $\{\eta_t\}$ 不是标准布朗运动。虽然 $\eta_t = B_{2t} - B_t$ 是高斯过程的线性组合, 均值为 0, 且轨道连续。但我们来考察它的协方差函数。不妨设 $0 < s < t$, 计算 $\text{Cov}(\eta_s, \eta_t)$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\eta_s, \eta_t) &= \text{Cov}(B_{2s} - B_s, B_{2t} - B_t) \\ &= \text{Cov}(B_{2s}, B_{2t}) - \text{Cov}(B_{2s}, B_t) - \text{Cov}(B_s, B_{2t}) + \text{Cov}(B_s, B_t) \\ &= \min(2s, 2t) - \min(2s, t) - \min(s, 2t) + \min(s, t) \\ &= 2s - \min(2s, t) - s + s \\ &= 2s - \min(2s, t)\end{aligned}$$

如果 $\{\eta_t\}$ 是标准布朗运动, 那么对于 $s < t$, 必须有 $\text{Cov}(\eta_s, \eta_t) = \min(s, t) = s$ 。但是 $2s - \min(2s, t) = s$ 当且仅当 $\min(2s, t) = s$, 这要求 $t \geq 2s$ 。若选取 $s = 1, t = 1.5$ (满足 $s < t$), 则 $\text{Cov}(\eta_1, \eta_{1.5}) = 2(1) - \min(2, 1.5) = 2 - 1.5 = 0.5 \neq 1$ 。由于协方差函数不恒等于 $\min(s, t)$, 故 $\{\eta_t\}$ 不是标准布朗运动。□

8. 证明下列随机过程都是标准布朗运动:

- (1) $\{-B_t : t \geq 0\}$;
- (2) $\{B_{t+u} - B_u : t \geq 0\}$;
- (3) $\{B_{T-t} - B_T : 0 \leq t \leq T\}$. (仅有限时间段)

Proof. 本题中三个过程均是标准布朗运动 $\{B_t\}$ 的线性变换或平移, 因此它们显然都是均值为 0 且轨道连续的高斯过程。我们只需要验证它们的协方差函数是否等于 $\min(s, t)$ 。不妨设 $0 \leq s \leq t$ 。

(1) 设 $X_t = -B_t$:

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(-B_s, -B_t) = \text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t) = s$$

满足条件, 故 $\{-B_t\}$ 是标准布朗运动。

(2) 设 $Y_t = B_{t+u} - B_u$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y_s, Y_t) &= \text{Cov}(B_{s+u} - B_u, B_{t+u} - B_u) \\ &= \text{Cov}(B_{s+u}, B_{t+u}) - \text{Cov}(B_{s+u}, B_u) - \text{Cov}(B_u, B_{t+u}) + \text{Cov}(B_u, B_u) \\ &= (s+u) - u - u + u = s\end{aligned}$$

满足条件, 故 $\{B_{t+u} - B_u\}$ 是标准布朗运动。

(3) 设 $Z_t = B_{T-t} - B_T$ (其中 $0 \leq s \leq t \leq T$):

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Z_s, Z_t) &= \text{Cov}(B_{T-s} - B_T, B_{T-t} - B_T) \\ &= \text{Cov}(B_{T-s}, B_{T-t}) - \text{Cov}(B_{T-s}, B_T) - \text{Cov}(B_T, B_{T-t}) + \text{Cov}(B_T, B_T)\end{aligned}$$

由于 $s \leq t$, 有 $T-s \geq T-t$, 因此 $\min(T-s, T-t) = T-t$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Z_s, Z_t) &= (T-t) - (T-s) - (T-t) + T \\ &= (T-t) - T + s - T + t + T = s\end{aligned}$$

满足条件, 故 $\{B_{T-t} - B_T\}$ 是标准布朗运动。□

9. 假设 $\{X_t\}$ 是轨道连续的高斯过程,

$$EX_t = 0, \quad \forall t \geq 0; \quad \text{Cov}(X_s, X_t) = f(s)g(t), \quad \forall s \geq t \geq 0,$$

其中, f, g 是 \mathbb{R}_+ 上的非负函数. 假设 f 取值严格正, $g(0) = 0, \varphi := g/f$ 连续、严格单调上升且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. 将 φ 的反函数记为 φ^{-1} . 对任意 $t \geq 0$, 令 $W_t = X_{\varphi^{-1}(t)}/f(\varphi^{-1}(t))$. 证明: $\{W_t\}$ 是一维标准布朗运动.

Proof. 已知 $W_t = \frac{X_{\varphi^{-1}(t)}}{f(\varphi^{-1}(t))}$. 由于 $\{X_t\}$ 是均值为 0 且轨道连续的高斯过程; f 是严格正的函数; φ 连续且严格单调上升, 故其反函数 φ^{-1} 存在且连续. 因此, $\{W_t\}$ 只是对 $\{X_t\}$ 进行了确定的时间尺度变换和空间伸缩变换, 它必然是一个均值为 0 的高斯过程, 且轨道几乎处处连续.

我们需要证明的关键在于其协方差函数为 $\min(s, t)$. 不妨设 $0 \leq s \leq t$. 令 $u = \varphi^{-1}(s), v = \varphi^{-1}(t)$. 因为 φ 严格单调上升, 且 $s \leq t$, 所以必定有 $u \leq v$. 即 X 的时间下标满足 $v \geq u \geq 0$.

计算 $\{W_t\}$ 的协方差:

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \text{Cov}\left(\frac{X_u}{f(u)}, \frac{X_v}{f(v)}\right) = \frac{1}{f(u)f(v)} \text{Cov}(X_u, X_v)$$

由题目条件已知, 当 $v \geq u \geq 0$ 时, $\text{Cov}(X_v, X_u) = f(v)g(u)$. 代入上式:

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \frac{f(v)g(u)}{f(u)f(v)} = \frac{g(u)}{f(u)}$$

根据定义, $\varphi(u) = \frac{g(u)}{f(u)}$, 所以:

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \varphi(u)$$

又因为 $u = \varphi^{-1}(s)$, 将其代入:

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \varphi(\varphi^{-1}(s)) = s = \min(s, t)$$

最后, 检验初值 W_0 : 由 $g(0) = 0$ 得 $\varphi(0) = g(0)/f(0) = 0$, 故 $\varphi^{-1}(0) = 0$. 所以 $\text{Var}(W_0) = \text{Cov}(W_0, W_0) = \min(0, 0) = 0$. 由于均值为 0 且方差为 0, 故 $P(W_0 = 0) = 1$.

综上所述, $\{W_t\}$ 是均值为 0、初值为 0、协方差函数为 $\min(s, t)$ 的连续高斯过程, 因此它是一维标准布朗运动. \square

3.3 不变原理概述

1. 设 \mathbf{f} 是 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的连续函数, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$. 令

$$f : C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \mathbf{f}(\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \dots, \varphi_{t_n}).$$

证明: f 是连续泛函.

Proof. 要证明泛函 $f : C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, 我们需要在 $C[0, T]$ 的一致收敛拓扑 (即由上确界范数诱导的距离空间) 下进行证明.

设空间 $C[0, T]$ 赋予一致范数 $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\varphi_t|$. 任取 $C[0, T]$ 中的一条目标路径 φ , 并设 $\{\varphi^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 是 $C[0, T]$ 中的任意一个路径序列, 满足当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\varphi^{(m)}$ 依范数 (一致地) 收敛于 φ . 即:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi^{(m)} - \varphi\|_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} |\varphi_t^{(m)} - \varphi_t| = 0$$

由于一致收敛必然蕴含逐点收敛, 对于题目中给定的有限个离散时间点 $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, T]$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 显然有:

$$|\varphi_{t_i}^{(m)} - \varphi_{t_i}| \leq \|\varphi^{(m)} - \varphi\|_\infty \rightarrow 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

这意味着在 \mathbb{R}^n 空间中, 向量序列 $(\varphi_{t_1}^{(m)}, \varphi_{t_2}^{(m)}, \dots, \varphi_{t_n}^{(m)})$ 依坐标收敛于向量 $(\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \dots, \varphi_{t_n})$. 在有限维空间中, 坐标收敛等价于点列的欧氏距离收敛.

已知 \mathbf{f} 是从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的连续函数. 根据连续函数的序列极限性质 (Heine 定理), 当自变量点列在 \mathbb{R}^n 中收敛时, 其函数值序列也必然收敛于目标点的函数值. 因此:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\varphi_{t_1}^{(m)}, \varphi_{t_2}^{(m)}, \dots, \varphi_{t_n}^{(m)}) = \mathbf{f}(\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \dots, \varphi_{t_n})$$

再根据泛函 f 的定义, 上式直接等价于:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(\varphi^{(m)}) = f(\varphi)$$

由于目标路径 φ 和趋近序列 $\{\varphi^{(m)}\}$ 均是任意选取的, 这就严格证明了 f 是 $C[0, T]$ 上的连续泛函. \square

3.4 布朗轨道的性质

假设 $\{B_t\}$ 是一维标准布朗运动.

1. 假设直线上有 k 只猫从原点出发, 独立地做一维标准布朗运动, 并且有一只死老鼠位于位置 1. 将猫最先到达死老鼠位置的时刻记为 σ . 证明: $k \leq 2$ 时, $E\sigma = \infty$; $k \geq 3$ 时, $E\sigma < \infty$.

Proof. 设第 i 只猫到达死老鼠位置 1 的首中时为 $\tau_i = \inf\{t > 0 : B_t^{(i)} = 1\}$. 根据布朗运动的反射原理, 最大值的分布与末值的绝对值分布相同, 因此对于任意 $t > 0$:

$$P(\tau_i \leq t) = P\left(\max_{0 \leq s \leq t} B_s^{(i)} \geq 1\right) = 2P(B_t^{(i)} \geq 1) = P(|B_t^{(i)}| \geq 1)$$

由于 $B_t^{(i)} \sim N(0, t)$, 可以将其标准化为 $Z \sim N(0, 1)$, 得到尾概率的精确表达式:

$$P(\tau_i > t) = 1 - P(|B_t^{(i)}| \geq 1) = P(|B_t^{(i)}| < 1) = P\left(|Z| < \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

写成积分形式为:

$$P(\tau_i > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

接下来, 我们对这个积分进行严格的上下界放缩. 由于在积分区间 $x \in (0, 1/\sqrt{t})$ 内, 恒有 $e^{-1/(2t)} \leq e^{-x^2/2} \leq 1$, 因此我们可以得到:

上界:

$$P(\tau_i > t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{t}} 1 \cdot dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-1/2}$$

下界:

$$P(\tau_i > t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{2t}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-1/2} e^{-\frac{1}{2t}}$$

最先到达的时间 $\sigma = \min(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$. 由于 k 只猫的布朗运动相互独立, σ 的尾概率严格等于各自尾概率的乘积:

$$P(\sigma > t) = \prod_{i=1}^k P(\tau_i > t) = [P(\tau_1 > t)]^k$$

将刚才的上下界代入, 得到对所有 $t > 0$ 均成立的严格不等式:

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k/2} t^{-k/2} e^{-\frac{k}{2t}} \leq P(\sigma > t) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k/2} t^{-k/2}$$

随机变量 σ 的期望可表示为尾概率的积分:

$$E\sigma = \int_0^\infty P(\sigma > t) dt = \int_0^1 P(\sigma > t) dt + \int_1^\infty P(\sigma > t) dt$$

第一项是有限区间 $[0, 1]$ 上的概率积分, 显然有 $0 \leq \int_0^1 P(\sigma > t) dt \leq 1 < \infty$. 因此, 期望是否有限, 完全等价于无穷积分 $\int_1^\infty P(\sigma > t) dt$ 的敛散性.

情形一: 当 $k \geq 3$ 时利用上界, 我们有:

$$\int_1^\infty P(\sigma > t) dt \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k/2} \int_1^\infty t^{-k/2} dt$$

因为 $k \geq 3$, 所以幂指数 $k/2 \geq 3/2 > 1$. 根据 p -积分的敛散性, $\int_1^\infty t^{-k/2} dt$ 收敛. 由比较判别法可知 $\int_1^\infty P(\sigma > t) dt < \infty$, 从而 $E\sigma < \infty$.

情形二: 当 $k \leq 2$ 时利用下界, 并注意到当 $t \geq 1$ 时, 存在正的常数 $C_k = (2/\pi)^{k/2} e^{-k/2}$ 使得:

$$P(\sigma > t) \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k/2} t^{-k/2} e^{-\frac{k}{2t}} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k/2} t^{-k/2} e^{-\frac{k}{2}} = C_k t^{-k/2}$$

所以:

$$\int_1^\infty P(\sigma > t) dt \geq C_k \int_1^\infty t^{-k/2} dt$$

因为 $k \leq 2$, 所以幂指数 $k/2 \leq 1$. 此时 $\int_1^\infty t^{-k/2} dt$ 发散. 由比较判别法可知 $\int_1^\infty P(\sigma > t) dt = \infty$, 从而 $E\sigma = \infty$.

综上所述, 严格证明了: $k \leq 2$ 时 $E\sigma = \infty$; $k \geq 3$ 时 $E\sigma < \infty$. \square

2. 设 $\{W_t\}$ 是一维标准布朗运动, 且与 $\{B_t\}$ 相互独立. 对任意 $a > 0$, 令 $Y_a = W_{\tau_a}$, 其中 $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$.

(1) 求 Y_a 的分布, 并证明 Y_a 与 aY_1 同分布.

(2) 设 $b > a > 0$, 证明: Y_a 与 $Y_b - Y_a$ 相互独立.

(注: $\{Y_a : a \geq 0\}$ 被称为柯西 (Cauchy) 过程, 它是独立平稳增量的随机过程, 但轨道不连续.)

Proof. (1) 已知 $Y_a = W_{\tau_a}$, 且 $\{W_t\}$ 与 $\{B_t\}$ 独立, 从而 W 与 τ_a 独立. 我们利用特征函数来求 Y_a 的分布. 对给定 $\tau_a = t$ 的条件下, $W_{\tau_a} = W_t \sim N(0, t)$.

$$E[e^{iuY_a}] = E[E[e^{iuW_{\tau_a}} | \tau_a]] = E[e^{-\frac{1}{2}u^2\tau_a}]$$

根据一维布朗运动首中时的拉普拉斯变换公式 $E[e^{-\lambda\tau_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$, 在此令 $\lambda = \frac{1}{2}u^2$, 则 $\sqrt{2\lambda} = |u|$, 代入上式得:

$$E[e^{iuY_a}] = e^{-a|u|}$$

这正是尺度参数为 a 的柯西分布 (Cauchy Distribution) 的特征函数. 因此 $Y_a \sim \text{Cauchy}(0, a)$. 对于 aY_1 , 其特征函数为:

$$E[e^{iu(aY_1)}] = E[e^{i(au)Y_1}] = e^{-1|au|} = e^{-a|u|}$$

因此 $Y_a \stackrel{d}{=} aY_1$.

(2) 已知 $b > a > 0$. 根据布朗运动的强马氏性, $\tau_b - \tau_a$ 是布朗运动 $\{B_{\tau_a+t} - B_{\tau_a}\}$ 首次击中 $b - a$ 的时间. 我们记新的过程为 $\tilde{B}_t = B_{\tau_a+t} - B_{\tau_a}$. 同理, 我们定义 $\tilde{W}_t = W_{\tau_a+t} - W_{\tau_a}$. 由于 W 与 B 相互独立, \tilde{W} 也是标准布朗运动. 因此:

$$Y_b - Y_a = W_{\tau_b} - W_{\tau_a} = \tilde{W}_{\tau_b - \tau_a}$$

根据强马氏性, \tilde{B} 和 \tilde{W} 都独立于 τ_a 之前的历史信息 \mathcal{F}_{τ_a} (这里是 B 和 W 联合生成的停时 σ -代数). 而 $Y_a = W_{\tau_a}$ 完全由 τ_a 之前的轨道决定, 即 $Y_a \in \mathcal{F}_{\tau_a}$. 因为 $Y_b - Y_a$ 只依赖于 τ_a 之后的增量过程 \tilde{B} 和 \tilde{W} , 所以它与 \mathcal{F}_{τ_a} 独立, 进而与 Y_a 相互独立. \square

3. 试证: 对任意 $t > 0$, M_t 与 $|B_t|$ 同分布.

Proof. 设 $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$. 对于任意 $a > 0$, 我们计算 M_t 的尾概率 $P(M_t \geq a)$. 根据反射原理: 对于任意 $a > 0$, 达到或超过水平线 a 的轨道, 由于对称性, 在首次到达 a 之后向上和向下的概率相等. 因此, 最大值超过 a 但最终落回 a 以下的概率, 等于最终在 a 以上的概率, 即:

$$P(M_t \geq a, B_t < a) = P(B_t \geq a)$$

所以:

$$\begin{aligned} P(M_t \geq a) &= P(M_t \geq a, B_t \geq a) + P(M_t \geq a, B_t < a) \\ &= P(B_t \geq a) + P(B_t \geq a) \\ &= 2P(B_t \geq a) \end{aligned}$$

由于标准正态分布关于原点对称, $P(B_t \geq a) = P(B_t \leq -a)$, 于是:

$$2P(B_t \geq a) = P(B_t \geq a) + P(B_t \leq -a) = P(|B_t| \geq a)$$

我们得到了 $P(M_t \geq a) = P(|B_t| \geq a)$ 对任意 $a > 0$ 成立. 且 M_t 和 $|B_t|$ 都是非负随机变量, 累积分布函数完全一致, 故它们同分布. \square

4. 设 $x > y$, 试求 $P(M_t \geq x, B_t \leq y)$. (用积分表达)

Proof. 已知 $x > 0$ 且 $x > y$. 同样利用反射原理. 事件 $\{M_t \geq x, B_t \leq y\}$ 描述的是: 布朗运动在 $[0, t]$ 期间曾经到达过 x 这一高度, 但最终在时刻 t 回落到了 y 及其以下. 令 $\tau_x = \inf\{s > 0 : B_s = x\}$. 该事件等价于 $\{\tau_x \leq t, B_t \leq y\}$. 我们将时刻 τ_x 之后的布朗轨道关于水平线 x 进行对称反射. 由于布朗运动的对称性和强马氏性, 反射后的轨道仍是布朗运动. 原本在 t 时刻处于 y 及其以下的点, 经过关于 x 的反射, 变成了在 $x + (x - y) = 2x - y$ 及其以上的点. 因此, 这两个事件的概率严格相等:

$$P(M_t \geq x, B_t \leq y) = P(B_t \geq 2x - y)$$

由于 $B_t \sim N(0, t)$, 用积分表达为:

$$P(M_t \geq x, B_t \leq y) = \int_{2x-y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du$$

□

5. 证明 (M_t, B_t) 是二维连续型随机变量, 并求其联合密度函数.

Proof. 先写出 (M_t, B_t) 的联合分布函数 $F(x, y) = P(M_t \leq x, B_t \leq y)$. 对于 $x > 0$ 且 $y \leq x$:

$$F(x, y) = P(B_t \leq y) - P(M_t > x, B_t \leq y)$$

由第 4 题的结论, 当 $x > 0$ 且 $y \leq x$ 时, $P(M_t > x, B_t \leq y) = P(B_t > 2x - y)$. 利用标准正态分布的累积分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示:

$$P(B_t \leq y) = \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)$$

$$P(B_t > 2x - y) = 1 - \Phi\left(\frac{2x - y}{\sqrt{t}}\right)$$

代入得到:

$$F(x, y) = \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2x - y}{\sqrt{t}}\right)$$

联合密度函数 $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$. 首先对 x 求偏导:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(\frac{2x - y}{\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{2x - y}{\sqrt{t}}\right)$$

(其中 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ 是标准正态分布密度函数). 将 ϕ 展开:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2x - y)^2}{2t}\right)$$

接下来再对 y 求偏导:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2x - y)^2}{2t}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2x - y)^2}{2t}\right) \cdot \left(-\frac{2(2x - y)}{2t} \cdot (-1)\right) \\ &= \frac{2(2x - y)}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2x - y)^2}{2t}\right) \end{aligned}$$

因此, 二维连续型随机变量 (M_t, B_t) 的联合密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2(2x - y)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2x - y)^2}{2t}}, & x > 0 \text{ 且 } y \leq x \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

□

6*. 将 $[0, t]$ 上唯一的最大值点记为 Λ_t . 证明 (M_t, B_t, Λ_t) 是三维连续型随机变量, 并求其联合密度函数.

Proof. 将 $[0, t]$ 上唯一的最大值点记为 Λ_t . 对于事件 $\{\Lambda_t \in ds, M_t \in dm, B_t \in dx\}$, 意味着布朗轨道的最大值 m 恰好在时刻 s 取得, 且最终在时刻 t 到达 x .

利用布朗运动的马氏性, 我们可以将轨道在时刻 s 处切分为独立的两段: (1) 在 $[0, s]$ 期间, 轨道从 0 出发, 且在时刻 s 首次到达最大值 m . 根据布朗运动首中时 τ_m 的分布, 该段轨道的密度函数为:

$$f_{\tau_m}(s) = \frac{m}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{m^2}{2s}}$$

(2) 在 $[s, t]$ 期间, 轨道从 m 出发, 最终在时刻 t 到达 x , 并且在 $(s, t]$ 内严格低于 m (因为最大值唯一)。利用时间反转对称性, 将这后半段轨道反转 $\tilde{B}_u = m - B_{t-u}$, 它等价于一条从 $m - x$ 出发, 经过时间 $t - s$ 首次到达 m 的标准布朗运动。其密度函数同样由首中时公式给出, 即首中距离为 $m - x$, 经历时间为 $t - s$:

$$f_{\tau_{m-x}}(t-s) = \frac{m-x}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{(m-x)^2}{2(t-s)}}$$

由于这两段增量过程完全独立, 我们将二者的密度函数直接相乘, 即可得到 (M_t, B_t, Λ_t) 的联合密度函数:

$$p(m, x, s) = \frac{m(m-x)}{2\pi s^{3/2}(t-s)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^2}{2s} - \frac{(m-x)^2}{2(t-s)}\right)$$

其中 $0 < s < t$, 并且 $m > 0, x < m$ 。 □

7. 证明: $P_0(M_t > a \mid B_t = M_t) = e^{-a^2/2t}$. (注: 令 $X_t = M_t - B_t$, 先求 (M_t, X_t) 的联合密度.)

Proof. 首先求 (M_t, X_t) 的联合密度。已知 (M_t, B_t) 的联合密度函数为:

$$f_{M_t, B_t}(m, x) = \frac{2(2m-x)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-x)^2}{2t}}, \quad m > 0, x \leq m$$

作变量代换 $X_t = M_t - B_t$, 则 $x = m - z$ 。雅可比行列式的绝对值为 1。代入可得 (M_t, X_t) 的联合密度为:

$$f_{M_t, X_t}(m, z) = f_{M_t, B_t}(m, m-z) = \frac{2(m+z)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(m+z)^2}{2t}}, \quad m > 0, z \geq 0$$

事件 $\{B_t = M_t\}$ 严格等价于 $\{X_t = 0\}$ 。我们需要求在 $X_t = 0$ 条件下 M_t 的条件密度。

已知 $X_t = M_t - B_t \stackrel{d}{=} |B_t|$, 所以 X_t 在 0 处的边缘密度为 $f_{X_t}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$ 。利用条件密度公式:

$$f_{M_t|X_t}(m|0) = \frac{f_{M_t, X_t}(m, 0)}{f_{X_t}(0)} = \frac{\frac{2m}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{m^2}{2t}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}} = \frac{m}{t} e^{-\frac{m^2}{2t}}, \quad m > 0$$

(这表明条件分布是一个瑞利分布)。

最后, 对条件密度在 (a, ∞) 上积分:

$$P_0(M_t > a \mid B_t = M_t) = \int_a^\infty \frac{m}{t} e^{-\frac{m^2}{2t}} dm = e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

□

8. 假设 $0 < s < t$. 试求 $P(\exists u \in (s, t), \text{使得 } M_u = B_u)$.

Proof. 如果存在 $u \in (s, t)$ 使得 $M_u = B_u$, 这意味着布朗运动在 (s, t) 区间内刷新了历史最大值。由于最大值在连续时间点上恰好落在边界上的概率为 0, 该事件几乎处处等价于 $\{M_t > M_s\}$ 。

我们将 M_t 拆解为 s 之前和 s 之后的最大值:

$$M_t = \max\left(M_s, B_s + \max_{v \in [0, t-s]} (B_{s+v} - B_s)\right)$$

令 $\tilde{M}_{t-s} = \max_{v \in [0, t-s]} (B_{s+v} - B_s)$, 则 \tilde{M}_{t-s} 是一个独立于 \mathcal{F}_s 的布朗运动的最大值。

$$M_t > M_s \iff B_s + \tilde{M}_{t-s} > M_s \iff \tilde{M}_{t-s} > M_s - B_s$$

根据布朗运动的性质, $\tilde{M}_{t-s} \stackrel{d}{=} |B'_{t-s}|$, 且 $M_s - B_s \stackrel{d}{=} |B_s|$, 两者相互独立。因此我们要计算的概率转化为:

$$P(|B'_{t-s}| > |B_s|) = P(\sqrt{t-s}|Z_2| > \sqrt{s}|Z_1|) = P\left(\frac{|Z_1|}{|Z_2|} < \sqrt{\frac{t-s}{s}}\right)$$

其中 Z_1, Z_2 是独立的标准正态随机变量。两个独立标准正态变量的比值 Z_1/Z_2 服从标准柯西分布 $\text{Cauchy}(0, 1)$, 其密度为 $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 。

$$P\left(|C| < \sqrt{\frac{t-s}{s}}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{(t-s)/s}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{t-s}{s}}$$

利用三角恒等式 $\arctan(x) = \arccos(1/\sqrt{1+x^2})$, 可将其化简为:

$$P(\exists u \in (s, t), \text{使得 } M_u = B_u) = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{s}{t}}$$

□

9*. 对任意 $t \geq 0$, 记 $Y_t = M_t - B_t$. 对任意 $0 < s < t$, 证明:

$$(1) Y_t = \max\{\max_{s \leq u \leq t}(B_u - B_s), Y_s\} - (B_t - B_s);$$

$$(2) (Y_s, Y_t) \text{ 与 } (|B_s|, |B_t|) \text{ 同分布.}$$

Proof. (1) 根据定义 $M_t = \max_{0 \leq u \leq t} B_u$. 将 $[0, t]$ 上的最大值拆分为 $[0, s]$ 和 $[s, t]$ 两个区间上的最大值:

$$M_t = \max\left\{M_s, \max_{s \leq u \leq t} B_u\right\}$$

在 \max 函数内部统一减去 B_s :

$$M_t - B_s = \max\left\{M_s - B_s, \max_{s \leq u \leq t}(B_u - B_s)\right\} = \max\left\{Y_s, \max_{s \leq u \leq t}(B_u - B_s)\right\}$$

接着在等式两边同时减去 $(B_t - B_s)$, 左侧化为 $M_t - B_s - (B_t - B_s) = M_t - B_t = Y_t$. 于是右侧为:

$$Y_t = \max\left\{\max_{s \leq u \leq t}(B_u - B_s), Y_s\right\} - (B_t - B_s)$$

(2) 要证明 (Y_s, Y_t) 与 $(|B_s|, |B_t|)$ 同分布, 鉴于已经知晓边缘分布 $Y_s \stackrel{d}{=} |B_s|$, 只需证明在给定初值 y 的条件下, 二者的转移分布完全相同即可. 令 $W'_v = B_{s+v} - B_s$, 则 W' 是长度为 $\tau = t - s$ 的标准布朗运动, 记其最大值为 M' . 由 (1) 可知 $Y_t = \max(M', y) - W'_\tau$. 我们通过积分联合密度 $f(m, x) = \frac{2(2m-x)}{\tau\sqrt{2\pi\tau}} e^{-(2m-x)^2/2\tau}$ 来求分布函数 $P(\max(M', y) - W'_\tau \leq z)$:

$$P(\max(M', y) - W'_\tau \leq z) = \int_0^\infty dm \int_{\max(m, y)-z}^m f(m, x) dx$$

内层对 x 的积分可直接计算出结果为 $\frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}} \left(e^{-\frac{m^2}{2\tau}} - e^{-\frac{(2m-\max(m, y)+z)^2}{2\tau}} \right)$. 根据 m 与 y 的大小关系, 将外层积分拆分为 $(0, y)$ 和 (y, ∞) 两部分:

$$= \int_0^y \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}} \left(e^{-\frac{m^2}{2\tau}} - e^{-\frac{(2m-y+z)^2}{2\tau}} \right) dm + \int_y^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}} \left(e^{-\frac{m^2}{2\tau}} - e^{-\frac{(m+z)^2}{2\tau}} \right) dm$$

分别作换元 $u = y - z - 2m$ 以及 $v = m + z$, 积分将完美化简为标准正态累积分布函数 Φ 的差值:

$$P(\max(M', y) - W'_\tau \leq z) = \Phi\left(\frac{y+z}{\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{y-z}{\sqrt{\tau}}\right)$$

而这精确等于 $P(y-z \leq W'_\tau \leq y+z) = P(|W'_\tau + y| \leq z)$, 即布朗运动绝对值过程的条件概率 $P(|B_t| \leq z \mid |B_s| = y)$. 由于在任意状态 y 下的转移概率完全一致, 且 $Y_s \stackrel{d}{=} |B_s|$, 因此联合分布 (Y_s, Y_t) 与 $(|B_s|, |B_t|)$ 同分布. □

10. 证明: 对任意 $C, t > 0$,

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| > C\right) \leq \frac{2t}{C^2}.$$

Proof. 令 $M_t = \max_{0 \leq u \leq t} B_u$ 以及 $m_t = \min_{0 \leq u \leq t} B_u$ 。显然，布朗运动在 $[0, t]$ 上的绝对值最大值满足：

$$\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| = \max(M_t, -m_t)$$

因此，绝对值最大值超过 C 的事件，可以由 Boole 不等式放缩：

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| > C\right) = P(M_t > C \text{ 或 } -m_t > C) \leq P(M_t > C) + P(-m_t > C)$$

由布朗运动的对称性知 $\{-B_t\}$ 也是标准布朗运动，故 $-m_t \stackrel{d}{=} M_t$ 。上式化为：

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| > C\right) \leq 2P(M_t > C)$$

根据反射原理， $P(M_t > C) = 2P(B_t > C)$ ，代入可得：

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| > C\right) \leq 4P(B_t > C)$$

由于标准正态分布是对称的， $2P(B_t > C) = P(B_t > C) + P(B_t < -C) = P(|B_t| > C)$ 。因此：

$$4P(B_t > C) = 2P(|B_t| > C)$$

最后，对随机变量 B_t （均值为 0，方差为 t ）应用切比雪夫不等式（Chebyshev's Inequality）：

$$P(|B_t| > C) \leq \frac{E[B_t^2]}{C^2} = \frac{t}{C^2}$$

综上所述：

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| > C\right) \leq 2 \cdot \frac{t}{C^2} = \frac{2t}{C^2}$$

□

11*. 证明上题中，不等号右边的常数 2 可以改为 1。

Proof. 要得到更紧的界（常数为 1），我们需要利用鞅理论中的 Doob 极大值不等式。已知标准布朗运动 $\{B_u\}_{u \geq 0}$ 是一个连续鞅。由于函数 $f(x) = x^2$ 是凸函数，根据 Jensen 不等式，过程 $\{B_u^2\}_{u \geq 0}$ 是一个非负的下鞅（Submartingale）。事件 $\{\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| > C\}$ 与事件 $\{\sup_{0 \leq u \leq t} B_u^2 > C^2\}$ 是完全等价的。对非负下鞅 $\{B_u^2\}$ 在区间 $[0, t]$ 上直接应用 Doob 极大值不等式：

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} B_u^2 \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E[B_t^2]$$

令 $\lambda = C^2$ ，并代入 $E[B_t^2] = t$ ，即可得到：

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| > C\right) = P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} B_u^2 > C^2\right) \leq \frac{t}{C^2}$$

这就证明了不等号右边的常数确实可以改进为 1。

□

12. 证明：对任意 $x \in \mathbb{R}$, $P_0(\lim_{y \rightarrow x} \tau_y = \tau_x) = 1$ 。

Proof. 我们要证明对任意 $x \in \mathbb{R}$ ，有 $\lim_{y \rightarrow x} \tau_y = \tau_x$ a.s.。分左右极限来讨论。

第一部分：证明 $\lim_{y \uparrow x} \tau_y = \tau_x$ a.s.

不妨设 $x > 0$ 。当 $0 < y < x$ 时，布朗轨道必须先经过 y 才能到达 x ，因此 $\tau_y \leq \tau_x$ 。这意味着随 y 增大， τ_y 是单调不减的。

令 $\tau_{x-} = \lim_{y \uparrow x} \tau_y$ 。显然 $\tau_{x-} \leq \tau_x$ 。由于布朗轨道连续，对任意 y 都有 $B_{\tau_y} = y$ 。令 $y \uparrow x$ ，由轨道的连续性得 $B_{\tau_{x-}} = \lim_{y \uparrow x} B_{\tau_y} = x$ 。

既然在 τ_{x-} 时刻轨道已经到达了 x , 而 τ_x 是首次到达 x 的时间, 故必然有 $\tau_x \leq \tau_{x-}$. 结合两者, 得到 $\tau_{x-} = \tau_x$.

第二部分: 证明 $\lim_{y \downarrow x} \tau_y = \tau_x$ a.s.

当 $y > x$ 时, 到达 y 必须先到达 x (或者恰好以 x 为起点), 因此 $\tau_y \geq \tau_x$. 随 y 减小, τ_y 单调不减.

令 $\tau_{x+} = \lim_{y \downarrow x} \tau_y$. 显然有 $\tau_{x+} \geq \tau_x$. 根据强马氏性, 在停时 τ_x 之后的过程 $W_t = B_{\tau_x+t} - x$ 是一个全新的标准布朗运动 (从 0 出发).

$\tau_{x+} - \tau_x$ 实际上代表了这个新布朗运动 $\{W_t\}$ 首次击中无穷小正数的时间. 由于标准布朗运动满足 $P_0(\inf\{t > 0 : W_t > 0\} = 0) = 1$ (即轨道在 0 点的右邻域内会无限次震荡变号, 0 对于 $(0, \infty)$ 是正则的), 因此随目标距离趋于 0, 新过程击中目标的时间也几乎必然趋于 0.

这就意味着 $\tau_{x+} - \tau_x = 0$ a.s., 即 $\tau_{x+} = \tau_x$ a.s.. 综合左右极限, 得到 $\lim_{y \rightarrow x} \tau_y = \tau_x$ 几乎处处成立. \square

13. 利用上题证明 $P_0(\sigma_0 = 0) = 1$.

Proof. $\sigma_0 = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$ 表示首次返回 0 的时间.

在 P_0 测度下 (即 $B_0 = 0$), 首中时 $\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\} = 0$. 根据第 12 题的结论, 代入 $x = 0$, 我们有:

$$P_0 \left(\lim_{y \rightarrow 0} \tau_y = \tau_0 = 0 \right) = 1$$

这意味着, 几乎必然地: 对于任意给定的时间 $\epsilon > 0$, 都存在一个空间距离 $\delta > 0$, 使得当目标 $|y| < \delta$ 时, 轨道首中时间 $\tau_y < \epsilon$.

我们在 $(0, \delta)$ 中任取一个正数 y_1 , 在 $(-\delta, 0)$ 中任取一个负数 y_2 , 几乎必然地有 $\tau_{y_1} < \epsilon$ 且 $\tau_{y_2} < \epsilon$. 这表明布朗运动在时间段 $(0, \epsilon)$ 内, 既到达过正数 y_1 (此时 $B_{\tau_{y_1}} > 0$), 也到达过负数 y_2 (此时 $B_{\tau_{y_2}} < 0$).

由于布朗运动的轨道是连续的, 根据介值定理, 在时刻 τ_{y_1} 和 τ_{y_2} 之间, 轨道必然穿过了 0 点.

设穿过 0 点的时刻为 t^* , 显然有 $0 < t^* < \max(\tau_{y_1}, \tau_{y_2}) < \epsilon$. 这证明了, 对任意小的 $\epsilon > 0$, 在区间 $(0, \epsilon)$ 内几乎必然存在 $B_{t^*} = 0$. 既然在 0 的任意小的正邻域内都有 0 点, 那么返回时间的确切下确界 $\inf\{t > 0 : B_t = 0\}$ 必然为 0. 即 $P_0(\sigma_0 = 0) = 1$. \square

14. 用两种方法证明一维标准布朗运动是点常返的, 即

$$P_0(\forall t > 0, \exists s > t, \text{使得 } B_s = 0) = 1.$$

Proof. 要证几乎必然地, 布朗运动在任意大时刻之后都会再次回到原点.

方法一: 利用极限上下确界与介值定理

根据布朗运动的重对数律, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 布朗轨道几乎必然会有无穷大的震荡:

$$P_0 \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty \right) = 1, \quad P_0 \left(\liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty \right) = 1$$

这意味着, 对于任意给定的时间 $t > 0$, 几乎必然存在 $s_1 > t$ 使得 $B_{s_1} > 0$, 且存在 $s_2 > t$ 使得 $B_{s_2} < 0$.

由于布朗运动的轨道是关于时间连续的, 根据介值定理, 在 s_1 和 s_2 之间必然存在某一点 s . 因为 s 介于 s_1 和 s_2 之间, 且 $s_1, s_2 > t$, 所以必然有 $s > t$. 并且在该点处有 $B_s = 0$. 由于 t 是任意的, 这就证明了 $P_0(\forall t > 0, \exists s > t, \text{使得 } B_s = 0) = 1$.

方法二: 利用强马氏性构造停时序列

构造一个严格递增的停时序列 $\{T_n\}$. 令 $T_0 = 0$. 令 $T_1 = \inf\{t > 1 : B_t = 0\}$. 因为一维布朗运动一定能以概率 1 击中 0 (由首中时性质 $P_x(\tau_0 < \infty) = 1, \forall x$), 所以 $P_0(T_1 < \infty) = 1$.

假设 $T_{n-1} < \infty$ 几乎必然成立. 定义 $T_n = \inf\{t > T_{n-1} + 1 : B_t = 0\}$. 根据强马氏性, 在停时 $T_{n-1} + 1$ 之后, 过程 $W_t = B_{T_{n-1}+1+t} - B_{T_{n-1}+1}$ 是一个独立于过去的新标准布朗运动.

因此, 从状态 $B_{T_{n-1}+1}$ 出发, 新过程再次击中 0 的时间是几乎必然有限的, 这蕴含了 $P_0(T_n < \infty \mid \mathcal{F}_{T_{n-1}+1}) = 1$.

由数学归纳法可得, 对于任意 $n \geq 1$, $P_0(T_n < \infty) = 1$.

由于每次寻找下一个 0 点都至少跨越了长度为 1 的时间间隔, 即 $T_n \geq T_{n-1} + 1$, 从而有 $T_n \geq n$.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $T_n \rightarrow \infty$ 几乎必然成立.

这说明在时间轴上存在一个趋于无穷大的时刻序列 $\{T_n\}$, 在这些时刻上都有 $B_{T_n} = 0$. 因此对任意 $t > 0$, 总能找到足够大的 n 使 $T_n > t$ 且 $B_{T_n} = 0$. \square

15. 设 $0 < t_0 \leq t_1 \leq t_2$. 试求:

$$P_0(B_s \neq 0, \forall s \in (t_0, t_2) \mid B_s \neq 0, \forall s \in (t_0, t_1)).$$

Proof. 记事件 $A(a, b) = \{B_s \neq 0, \forall s \in (a, b)\}$, 即在区间 (a, b) 内轨道没有跨过或接触 0 点。

已知 $0 < t_0 \leq t_1 \leq t_2$ 。显然有 $A(t_0, t_2) \subseteq A(t_0, t_1)$, 因为如果在较大的区间内没有零点, 那么在较小的子区间内肯定也没有零点。

根据条件概率公式:

$$P(A(t_0, t_2) | A(t_0, t_1)) = \frac{P(A(t_0, t_2) \cap A(t_0, t_1))}{P(A(t_0, t_1))} = \frac{P(A(t_0, t_2))}{P(A(t_0, t_1))}$$

现在问题转化为求形如 $P_0(A(t_0, t))$ 的概率。这等价于最后一次离开 0 的时间 $L_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$ 严格小于 t_0 。

根据反正弦律, L_t 的分布函数为:

$$P_0(L_t \leq x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x}{t}}, \quad \text{对 } 0 < x < t$$

所以, 在 (t_0, t) 内没有零点的概率为:

$$P_0(A(t_0, t)) = P_0(L_t \leq t_0) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_0}{t}}$$

将这一结果分别代入 $t = t_2$ 和 $t = t_1$, 条件概率的分子和分母即为:

$$P_0(A(t_0, t_2)) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_0}{t_2}}$$

$$P_0(A(t_0, t_1)) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}$$

两式相除, 常数项抵消, 最终得到:

$$P_0(B_s \neq 0, \forall s \in (t_0, t_2) | B_s \neq 0, \forall s \in (t_0, t_1)) = \frac{\arcsin \sqrt{t_0/t_2}}{\arcsin \sqrt{t_0/t_1}}$$

□

16. 令

$$X_t = \begin{cases} B_t, & t \neq \tau_1, \\ 0, & t = \tau_1. \end{cases}$$

试验证: $\{X_t\}$ 满足定义 3.2.1 中的 (1) 和 (2), 但不满足其中的 (3). (注: 满足 (1) 和 (2) 的过程并不唯一.)

定义 3.2.1 设 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是取值于 \mathbb{R} 的随机过程, $B_0 = 0$. 如果它满足以下三条:

- (1) $B_{t+s} - B_t \sim N(0, s), \forall t \geq 0, s > 0$,
- (2) 对任意 $0 < t_1 < \dots < t_n, B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 相互独立,
- (3) $P(B_t \text{ 关于 } t \text{ 连续}) = 1$,

则称 $\{B_t : t \geq 0\}$ 为 (一维) 标准布朗运动, 简称布朗运动.

Proof. 已知首中时 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : B_t = 1\}$ 是一个随机变量。由于它服从 Levy 分布, 其概率分布是绝对连续的。这意味着对于任意固定的时刻 $t > 0, P(\tau_1 = t) = 0$ 。因此, 对于任意固定的时刻 t , 几乎必然有 $t \neq \tau_1$ 。从而:

$$P(X_t = B_t) = 1$$

(1) 验证平稳独立增量且服从正态分布: 任取固定的 $t \geq 0, s > 0$ 。因为 $P(X_t = B_t) = 1$ 且 $P(X_{t+s} = B_{t+s}) = 1$, 所以几乎必然有 $X_{t+s} - X_t = B_{t+s} - B_t$ 。因为 $B_{t+s} - B_t \sim N(0, s)$, 所以 $X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$ 也成立。条件 (1) 满足。

(2) 验证增量独立性: 对任意给定的时间序列 $0 < t_1 < \dots < t_n$, 由于是可数个固定点:

$$P(X_{t_i} = B_{t_i}, \forall i = 1, \dots, n) = 1 - P(\exists i \text{ 使得 } \tau_1 = t_i) = 1 - \sum_{i=1}^n P(\tau_1 = t_i) = 1 - 0 = 1$$

这说明向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 几乎必然与 $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ 完全相等。因此, X 的任意有限维增量分布与标准布朗运动 B 完全一致, 必然相互独立。条件 (2) 满足。

(3) 验证轨道连续性 (反证): 虽然对任意确定的时间点 t , $X_t = B_t$ a.s.; 但作为一个整体的随机过程, 在随机时刻 $t = \tau_1$ 处发生了改变。根据布朗运动的性质, $P_0(\tau_1 < \infty) = 1$ 。且由 τ_1 的定义, 在这一时刻 $B_{\tau_1} = 1$ 。但根据过程 X 的构造, 在 $t = \tau_1$ 这一瞬间, $X_{\tau_1} = 0$ 。考虑当 $t \rightarrow \tau_1$ (且 $t \neq \tau_1$) 时的极限:

$$\lim_{t \rightarrow \tau_1} X_t = \lim_{t \rightarrow \tau_1} B_t = B_{\tau_1} = 1$$

而函数在该点的值为 $X_{\tau_1} = 0$ 。因为 $1 \neq 0$, 所以 X_t 在随机时间点 τ_1 处几乎必然是不连续的。因此 $P(X_t \text{ 关于 } t \text{ 连续}) = 0 \neq 1$ 。条件 (3) 不满足。 \square

17. 证明: $R := \inf\{t > 1 : B_t = 0\}$ 的概率密度为

$$\rho(t) = \begin{cases} 1/(\pi t \sqrt{t-1}), & t > 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

Proof. 令 $R = \inf\{t > 1 : B_t = 0\}$ 。我们可以将时间 t 平移, 令 $s = t - 1 > 0$ 。根据布朗运动的强马氏性, 过程 $W_s = B_{1+s} - B_1$ 是一个新的标准布朗运动, 且与 B_1 相互独立。此时 $B_t = 0 \iff B_{1+s} = 0 \iff W_s = -B_1$ 。

所以, $R - 1$ 等价于新布朗运动 $\{W_s\}$ 首次击中水平线 $-B_1$ 的时间, 记为 $\tau_{|-B_1|}$ 。

已知对于常数 x , 布朗运动首中时 $\tau_{|x|}$ 的概率密度函数为:

$$f_{\tau_{|x|}}(s) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{x^2}{2s}}, \quad s > 0$$

因为 $B_1 \sim N(0, 1)$, 其密度为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 。我们可以通过全概率公式 (对 $B_1 = x$ 积分) 求出 $S = R - 1$ 的边缘密度:

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{x^2}{2s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

利用被积函数的偶函数性质, 将积分区间变为 $[0, \infty)$ 并乘以 2:

$$f_S(s) = \frac{2}{2\pi s^{3/2}} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right) dx$$

令 $u = \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{s}\right)$, 则 $du = x\left(1 + \frac{1}{s}\right) dx = x \frac{s+1}{s} dx$, 即 $x dx = \frac{s}{s+1} du$ 。

$$f_S(s) = \frac{1}{\pi s^{3/2}} \frac{s}{s+1} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{\pi s^{1/2}(s+1)}$$

因为 $R = S + 1$, 代入 $s = t - 1$ (当 $t > 1$ 时), 得到 R 的密度函数 $\rho(t)$ 为:

$$\rho(t) = f_S(t-1) = \frac{1}{\pi \sqrt{t-1}((t-1)+1)} = \frac{1}{\pi t \sqrt{t-1}}$$

当 $t \leq 1$ 时, $\rho(t) = 0$ 。 \square

18. 证明: 布朗轨道的局部极大值点是稠集, 即

$$\{t \geq 0 : \exists \delta > 0, \text{使得若 } |s - t| < \delta, s \neq t, \text{则 } B_s < B_t\}$$

以概率 1 是 \mathbb{R} 中的稠集。

Proof. 要证明局部极大值点在 \mathbb{R}_+ 中是稠密的, 只需证明: 几乎必然地, 对于任意具有有理数端点的开区间 (q_1, q_2) , 布朗轨道在该区间内都至少存在一个局部极大值点。

任取一组有理数 $0 \leq q_1 < q_2$ 。考察布朗运动在闭区间 $[q_1, q_2]$ 上的最大值 M 。因为布朗轨道是连续的, 闭区间上的连续函数必然能取到最大值。

我们首先证明该最大值几乎必然不会在端点 q_1 和 q_2 处取得:

(1) 对于端点 q_1 : 根据布朗运动的性质, q_1 之后的增量 $W_t = B_{q_1+t} - B_{q_1}$ 是标准布朗运动。由于 0 对于 $(0, \infty)$ 是正则的, 在任意小的右邻域内 W_t 都会取到正值。因此几乎必然地, 在 (q_1, q_2) 内存在点使得 $B_t > B_{q_1}$, 即最大值不在 q_1 处取得。

(2) 对于端点 q_2 : 布朗运动的时间反转依然具有类似布朗运动的局部震荡性质。同样可以严格证明, 最大值落在右端点 q_2 的概率为 0。

因此, 最大值 M 几乎必然在开区间 (q_1, q_2) 的某个内部点 Λ 处取得。

既然 Λ 是 $[q_1, q_2]$ 上的最大值点且落在内部, 它必然是一个局部极大值点。

由于有理数对 (q_1, q_2) 只有可数无限多个, 属于可数集。根据概率论中的次可加性 (可数个发生概率为 1 的事件, 其交集的概率仍为 1): 几乎必然地, 每一个有理区间内部都包含至少一个局部极大值点。

这就意味着局部极大值点在 \mathbb{R}_+ 中以概率 1 是稠密的。 \square

19*. 证明: 对任意 $\alpha \in (0, 1/2)$, 存在依赖于 α 的随机变量 η_α , 使得

$$P_0(|B_t - B_s| \leq \eta_\alpha |t - s|^\alpha, \forall t, s \in [0, 1]) = 1.$$

Proof. 对于标准布朗运动, 增量 $B_t - B_s \sim N(0, |t - s|)$ 。我们计算其 $2m$ 阶绝对矩 (m 为任意正整数):

$$E[|B_t - B_s|^{2m}] = (2m - 1)!! \cdot |t - s|^m = C_m |t - s|^m$$

根据柯尔莫哥洛夫连续性定理: 如果一个随机过程 X 满足 $E[|X_t - X_s|^\gamma] \leq K|t - s|^{1+\beta}$, 那么它存在一个修改, 使得其轨道几乎处处局部 Hölder 连续, 且 Hölder 指数可为任意的 $\alpha < \frac{\beta}{\gamma}$ 。对照我们的式子, 取 $\gamma = 2m, 1 + \beta = m$, 即 $\beta = m - 1$ 。则 Hölder 连续的阶数 α 可以满足:

$$\alpha < \frac{m - 1}{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$$

由于布朗运动的轨道已经是连续的, 它就是自己的连续修改。题目给定任意 $\alpha \in (0, 1/2)$, 我们总可以选取一个足够大的正整数 m , 使得 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m} > \alpha$ 。因此, 几乎必然地, 布朗运动的轨道在紧集 $[0, 1]$ 上是 α 阶 Hölder 连续的。这等价于其 Hölder 范数 (随机变量 η_α) 是有限的:

$$\eta_\alpha := \sup_{s \neq t \in [0, 1]} \frac{|B_t - B_s|}{|t - s|^\alpha} < \infty, \quad \text{a.s.}$$

移项即得: $P_0(|B_t - B_s| \leq \eta_\alpha |t - s|^\alpha, \forall t, s \in [0, 1]) = 1$ 。 \square

20*. 考虑布朗轨道的零点集 $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$ 。对任意正整数 n , 令

$$X_n = \left| \left\{ i : 1 \leq i \leq n, \mathcal{Z} \cap \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \neq \emptyset \right\} \right|.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n / \sqrt{n} = \frac{4}{\pi}$ 。

Proof. 令事件 $A_i = \{\mathcal{Z} \cap [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \neq \emptyset\}$ 。则 $X_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$ 。要求 $E[X_n]$, 我们需要计算每个子区间包含零点的概率 $P_i = P(A_i)$ 。对于 $i = 1$, 区间为 $[0, 1/n]$ 。由于 $B_0 = 0$, 零点必在该区间内, 故 $P_1 = 1$ 。对于 $i \geq 2$, 区间为 $[s, t]$, 其中 $s = \frac{i-1}{n}, t = \frac{i}{n}$ 。该区间没有零点的概率, 等于最后一次离开零点的时间 $L_t \leq s$ 的概率。根据反正弦定律 (Arcsine Law):

$$P(\text{区间}(s, t) \text{ 无零点}) = P(L_t \leq s) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}$$

因此, 包含零点的概率为:

$$P_i = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{s}{t}}$$

代入 $s/t = \frac{i-1}{i}$, 并利用反三角函数恒等式 $\arccos \sqrt{1-x} = \arcsin \sqrt{x}$, 我们得到:

$$P_i = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{i}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \right)$$

于是, X_n 的期望为:

$$E[X_n] = \sum_{i=1}^n P_i = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{i=2}^n \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \right)$$

当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\arcsin(1/\sqrt{i}) \sim 1/\sqrt{i}$ 。利用定积分求和极限估计 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \sim \int_0^n x^{-1/2} dx = 2\sqrt{n}$, 我们可以计算极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[X_n]}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{2}{\pi} \cdot 2 = \frac{4}{\pi}$$

\square

3.5 位势理论

假设 $\{B_t\}$ 是一维标准布朗运动.

1. 求 $\min\{\tau_{-1}, \tau_2\}$ 的期望.

Proof. 根据推论 3.5.7, 对于一维布朗运动从 x 出发, 首次击中 a 或 b 的停时 $\tau = \min\{\tau_a, \tau_b\}$, 其期望可以直接由二次函数的边界值导出:

$$E_x \tau = (x - a)(b - x)$$

要求从起点 $B_0 = 0$ 出发, 首次击中 $a = -1$ 或 $b = 2$ 的停时 $\tau = \min\{\tau_{-1}, \tau_2\}$ 的期望. 将参数 $x = 0, a = -1, b = 2$ 代入可得:

$$E_0[\min\{\tau_{-1}, \tau_2\}] = (0 - (-1))(2 - 0) = 1 \times 2 = 2$$

□

2. 求 $\tau := \inf\{t > 0 : |B_t| = 1\}$ 的方差.

Proof. 已知 $\tau = \inf\{t > 0 : |B_t| = 1\} = \min\{\tau_{-1}, \tau_1\}$. 由推论 3.5.7, 代入 $a = -1, b = 1, x = 0$, 得期望 $E_0[\tau] = (0 - (-1))(1 - 0) = 1$. 为了求方差, 我们需要计算 $E_0[\tau^2]$. 这里我们应用伊藤公式. 定义函数 $f(x, t) = x^4 - 6tx^2 + 3t^2$. 应用伊藤公式求 $f(B_t, t)$ 的微分:

$$\begin{aligned} df(B_t, t) &= \frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt \\ &= (4B_t^3 - 12tB_t) dB_t + \left(-6B_t^2 + 6t + \frac{1}{2}(12B_t^2 - 12t) \right) dt \\ &= (4B_t^3 - 12tB_t) dB_t \end{aligned}$$

由于漂移项 (dt 项) 的系数完全抵消, 对上式两边从 0 到 τ 积分并在停时 τ 处取期望 (利用可选停时定理的结论, 伊藤积分项的期望为 0), 于是有:

$$E_0[f(B_\tau, \tau)] = f(B_0, 0) = 0$$

即 $E_0[B_\tau^4 - 6\tau B_\tau^2 + 3\tau^2] = 0$. 由于在停时 τ 时, 布朗运动必然落于边界, 即 $|B_\tau| = 1$, 故 $B_\tau^2 = 1$ 且 $B_\tau^4 = 1$. 代入得:

$$E_0[1 - 6\tau + 3\tau^2] = 0$$

利用期望的线性性质展开, 得 $1 - 6E_0[\tau] + 3E_0[\tau^2] = 0$. 将已知的 $E_0[\tau] = 1$ 代入, 解得 $3E_0[\tau^2] = 5 \implies E_0[\tau^2] = \frac{5}{3}$. 因此, 方差为:

$$\text{Var}(\tau) = E_0[\tau^2] - (E_0[\tau])^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$$

□

3. 试求 $P_0(\tau_1 < \tau_{-1} < \tau_2)$.

Proof. 根据命题 3.5.1, 一维布朗运动从 x 出发, 在击中 a 之前先击中 b 的概率为 $P_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{x-a}{b-a}$. 事件 $\{\tau_1 < \tau_{-1} < \tau_2\}$ 可以分为两个连续的阶段:

第一阶段: 从起点 0 出发, 在击中 -1 之前先击中 1.

代入参数 $x = 0, a = -1, b = 1$, 得到该阶段的概率为:

$$P_0(\tau_1 < \tau_{-1}) = \frac{0 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

第二阶段: 在第一阶段发生的前提下, 此时布朗运动位于边界 $B_{\tau_1} = 1$.

根据强马氏性, 从时刻 τ_1 开始的过程可以看作是从 1 出发的全新布朗运动. 我们需要这个新过程在击中 2 之前先击中 -1 . 代入参数 $x = 1, a = -1, b = 2$, 此时下界为 -1 , 上界为 2. 先击中下界的概率为 $P_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{b-x}{b-a}$:

$$P_1(\tau_{-1} < \tau_2) = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

由于强马氏性保证了停时后的过程演化与停时之前的轨道状态相互独立，全过程的联合概率即为这两阶段概率之积：

$$P_0(\tau_1 < \tau_{-1} < \tau_2) = P_0(\tau_1 < \tau_{-1})P_1(\tau_{-1} < \tau_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

□

4. 假设 $\{\vec{B}_t : t \geq 0\}$ 为 d 维标准布朗运动，令 $\tau := \inf\{t \geq 0 : |\vec{B}_t| = 1\}$. 试求： $E_{\vec{x}}\tau$ ，其中 $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ ，且 $\|\vec{x}\| < 1$.

Proof. 根据命题 3.5.11，高维布朗运动从区域 D 内部点 \vec{x} 出发，首中边界 ∂D 时，泛函 $\psi(\vec{x}) = E_{\vec{x}} \int_0^{\tau \partial D} g(B_t) dt$ 是狄利克雷-泊松问题 $\Delta\psi(\vec{x}) = -2g(\vec{x})$ 在区域 D 内的解，且在边界上 $\psi(\vec{y}) = 0$ 。

本题中，我们要求期望停时 $E_{\vec{x}}\tau$ ，即相当于在上述积分中取源项 $g(\vec{x}) = 1$ 。因此， $\psi(\vec{x}) = E_{\vec{x}}\tau$ 是下列边界值问题的解：

$$\begin{cases} \Delta\psi(\vec{x}) = -2, & \|\vec{x}\| < 1 \\ \psi(\vec{x}) = 0, & \|\vec{x}\| = 1 \end{cases}$$

由于区域（单位球）和边界条件均具有径向对称性，显然解 $\psi(\vec{x})$ 也应具有径向对称性，仅依赖于范数 $r = \|\vec{x}\|$ 。令 $z = \|\vec{x}\|^2 = r^2$ ，记 $\psi(\vec{x}) = F(z)$ 。根据对于拉普拉斯算子的径向展开关系：

$$\Delta\psi(\vec{x}) = 4zF''(z) + 2dF'(z)$$

将其代入方程得到： $4zF''(z) + 2dF'(z) = -2$ 。由于等号右侧为常数，我们尝试寻找一阶多项式解，设 $F(z) = Cz + K$ 。此时二次导数 $F''(z) = 0$ ，一次导数 $F'(z) = C$ 。代入方程得 $2dC = -2 \implies C = -\frac{1}{d}$ 。

由边界条件 $\|\vec{x}\| = 1$ 时 $\psi(\vec{x}) = 0$ ，即 $F(1) = 0$ ，得到：

$$C(1) + K = 0 \implies K = -C = \frac{1}{d}$$

于是多项式表达式为 $F(z) = -\frac{1}{d}z + \frac{1}{d} = \frac{1-z}{d}$ 。

替换回原变量，即可求得期望停时的显式解：

$$E_{\vec{x}}\tau = \psi(\vec{x}) = F(\|\vec{x}\|^2) = \frac{1 - \|\vec{x}\|^2}{d}$$

□

5. 试用布朗运动及其首中时来表达下列微分方程的解：

$$\begin{cases} f''(x) = g(x), & \forall x \in (a, b), \\ f(a) = c_1, f(b) = c_2, \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是 (a, b) 上的有界连续函数， c_1, c_2 为常数。

Proof. 根据命题 3.5.8 的结论，一维泊松边值问题可以通过布朗运动的首中时期望来直接显式表达。该命题的处理方式是将原问题拆分为纯边界条件问题（齐次狄利克雷问题）和内部源项问题（齐次边界泊松问题）。

首先考察边界条件部分：

设 $\varphi(x) = E_x f(B_\tau)$ 。根据命题 3.5.8， $\varphi(x)$ 满足齐次方程 $\varphi''(x) = 0$ ，且在边界上取值为 $\varphi(a) = f(a) = c_1$ ， $\varphi(b) = f(b) = c_2$ 。

结合命题 3.5.1，我们可以具体写出其期望展开：

$$\varphi(x) = f(a)P_x(\tau_a < \tau_b) + f(b)P_x(\tau_b < \tau_a) = c_1 \frac{b-x}{b-a} + c_2 \frac{x-a}{b-a}$$

其次考察内部源项部分：

已知总解需要满足 $f''(x) = g(x)$ 。而根据命题 3.5.8，泛函 $\psi(x) = E_x \int_0^\tau \tilde{g}(B_t) dt$ 满足泊松方程 $\psi''(x) = -2\tilde{g}(x)$ ，且边界条件为零即 $\psi(a) = \psi(b) = 0$ 。

为了使 $\psi''(x) = g(x)$ 严格成立，只需选取 $\tilde{g}(x) = -\frac{1}{2}g(x)$ 即可。此时， $\psi(x)$ 的概率表达形式为：

$$\psi(x) = E_x \int_0^\tau \left(-\frac{1}{2}g(B_t)\right) dt = -\frac{1}{2}E_x \int_0^\tau g(B_t) dt$$

根据线性微分算子的叠加原理, 将上述两部分相加所得的 $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ 既满足了内部源项方程 $f''(x) = 0 + g(x) = g(x)$, 又满足了特定边界条件 $f(a) = c_1 + 0 = c_1$ 以及 $f(b) = c_2 + 0 = c_2$ 。因此, 原微分方程的解可以完全用布朗运动的路径特征表达为:

$$f(x) = c_1 \frac{b-x}{b-a} + c_2 \frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{2} E_x \int_0^\tau g(B_t) dt$$

□

6. 假设 $\{\vec{W}_t : t \geq 0\}$ 为二维标准布朗运动, $L \subseteq \mathbb{R}^2$, $\tau = \inf\{t \geq 0 : \vec{W}_t \in L\}$. 在以下情形中, 证明: $P_0(\tau < \infty) = 1$.

- (1) L 是一条直线;
- (2) L 是一条线段;
- (3) $L = \{(x, y) : x, y \geq 0 \text{ 且 } x^2 + y^2 = 1\}$.

Proof. 要证明的是二维布朗运动的邻域常返性。对于二维标准布朗运动 $\{\vec{W}_t\}$, 我们已知它虽然不是“点”常返的, 但它是“集”常返的: 它会以概率 1 击中任意一个具有正半径的开圆盘。

(1) 不失一般性, 假设直线 L 的方程为 $y = a$ (如果不是水平线, 可以通过旋转坐标系, 由于二维布朗运动具有旋转不变性, 旋转后仍然是二维标准布朗运动)。

此时, 二维布朗运动 $\vec{W}_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ 的第二个分量 $W_t^{(2)}$ 是一维标准布朗运动。

击中直线 L 的时间 $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t^{(2)} = a\}$ 。

根据一维布朗运动的常返性性质 (一维布朗运动以概率 1 击中任意给定的实数点), 我们有:

$$P_0(\tau < \infty) = P_0(\exists t \geq 0 \text{ 使 } W_t^{(2)} = a) = 1$$

(2) 假设 L 是某条直线上的闭线段。虽然二维布朗运动不一定击中一个具体的“点”, 但它具有非常强烈的空间震荡性 (即在任意一点附近, 其轨道构成一个极其密集的网)。

根据二维布朗运动的对数位势性质 (例 3.5.14, 当 $d = 2$ 时), 任意具有正的对数容量 (Logarithmic Capacity) 的紧集, 都会被布朗运动以概率 1 击中。

因为任意长度大于 0 的线段其对数容量严格大于 0, 所以二维布朗运动以概率 1 会击中它:

$$P_0(\tau < \infty) = 1$$

(一种更初等的构造性证明思路是: 利用布朗运动会以概率 1 击中包含该线段的直线。由于布朗运动是集常返的, 它会无数次击中该直线, 且其在直线上的击中点序列可以构成直线上的一维柯西过程, 其值域在直线上是稠密的, 必然会落入该线段内。)

(3) 根据二维布朗运动的旋转不变性以及各态历经性。布朗运动会以概率 1 击中完整的单位圆 $\partial B(0, 1)$ 。

考虑每次布朗运动从原点出发 (或从圆内某点出发) 击中单位圆时落点的位置。由于布朗运动的完全对称性 (各向同性), 击中单位圆边界上的落点在圆周上服从均匀分布 (均匀测度)。

第一象限的四分之一圆弧 L 占据了整个圆周长度的 $1/4$ 。每次由内向外跨越单位圆时, 落在 L 上的概率为 $1/4 > 0$ 。

由于二维布朗运动是集常返 (Recurrent) 的, 它可以无数次地从很远处回到原点附近, 并重新向外穿越单位圆。既然每次穿越都有 $1/4$ 的独立正概率击中 L , 进行无穷多次尝试后, 击中 L 的概率必然为 1。即 $P_0(\tau < \infty) = 1$ 。 □

7. 假设 $d \geq 3$, $\{\vec{B}_t\}$ 是 d 维布朗运动. 证明:

$$P_0 \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{B}_t\| = \infty \right) = 1.$$

(注: 表明三维以上布朗运动是非常返的.)

Proof. 要证明 d 维 ($d \geq 3$) 布朗运动是暂留的 (Transient)。

根据例 3.5.14 的结论, 设定半径 R 和内半径 ε 满足 $0 < \varepsilon < \|\vec{x}\| < R$ 。

定义 $\tau_r = \inf\{t \geq 0 : \|\vec{B}_t\| = r\}$ 为首次击中半径为 r 的球面的时间。

考察函数 $\varphi(\vec{x}) = P_{\vec{x}}(\tau_\varepsilon < \tau_R)$ 。由位势理论, $\varphi(\vec{x})$ 满足区域内的狄利克雷问题 $\Delta\varphi = 0$, 且边界条件为 $\varphi(\vec{x}) = 1$ (当 $\|\vec{x}\| = \varepsilon$) 和 $\varphi(\vec{x}) = 0$ (当 $\|\vec{x}\| = R$)。

由径向对称性可求得:

$$P_{\bar{x}}(\tau_\varepsilon < \tau_R) = \frac{R^{2-d} - \|\bar{x}\|^{2-d}}{R^{2-d} - \varepsilon^{2-d}}, \quad (d \geq 3)$$

现在, 我们令外边界 $R \rightarrow \infty$ 。由于 $2-d \leq -1 < 0$, 所以 $R^{2-d} \rightarrow 0$ 。取极限:

$$P_{\bar{x}}(\tau_\varepsilon < \infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} P_{\bar{x}}(\tau_\varepsilon < \tau_R) = \frac{0 - \|\bar{x}\|^{2-d}}{0 - \varepsilon^{2-d}} = \left(\frac{\varepsilon}{\|\bar{x}\|}\right)^{d-2}$$

这个结果说明: 当起点 $\|\bar{x}\| > \varepsilon$ 时, 布朗运动回到内侧小球 (半径为 ε) 的概率严格小于 1 (并且随着 $\|\bar{x}\|$ 的增大而趋于 0)。

这意味着, 三维以上的布朗运动一旦离开某个有界区域, 就有正的概率永远不再回来。

根据概率论中的 Borel-Cantelli 引理 (或强马氏性的反复应用), 由于每次尝试回到有限区域的概率都小于某一个严格小于 1 的常数, 进行无数次尝试的总概率为 0。

因此, 几乎必然地, 布朗运动最终会脱离任意给定的有界球 $B(0, r)$ 且永远不再进入。

既然它最终不再进入任意半径为 r 的有界球, 这等价于说它的模长 $\|\bar{B}_t\|$ 会趋于无穷大。即:

$$P_0\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{B}_t\| = \infty\right) = 1$$

□

3.6 布朗桥与 O-U 过程

假设 $\{B_t\}$ 是一维标准布朗运动。

1. 令 $U_t = (1-t)B_{t/(1-t)}, 0 \leq t < 1; U_1 = 0$ 。证明: $\{U_t : 0 \leq t \leq 1\}$ 是布朗桥。

Proof. 已知 $U_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$ 对于 $t \in [0, 1)$, 且 $U_1 = 0$ 。我们要证明 $\{U_t : 0 \leq t \leq 1\}$ 是标准布朗桥。由于 $\{B_t\}$ 是高斯过程, $\{U_t\}$ 显然也是高斯过程。

(1) 对于 $t \in [0, 1)$, $E[U_t] = (1-t)E\left[B_{\frac{t}{1-t}}\right] = 0$ 。且 $E[U_1] = 0$ 。

(2) 任取 $0 \leq s \leq t < 1$ 。因为函数 $\frac{x}{1-x}$ 在 $(0, 1)$ 上是单调递增的, 所以 $\frac{s}{1-s} \leq \frac{t}{1-t}$ 。

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_s, U_t) &= E[U_s U_t] \\ &= (1-s)(1-t)E\left[B_{\frac{s}{1-s}} B_{\frac{t}{1-t}}\right] \\ &= (1-s)(1-t) \min\left(\frac{s}{1-s}, \frac{t}{1-t}\right) \\ &= (1-s)(1-t) \frac{s}{1-s} \\ &= s(1-t) \end{aligned}$$

这正是标准布朗桥的协方差函数。当 $t=1$ 时, 由于 $U_1=0$, 协方差为 0, 公式 $s(1-1)=0$ 依然成立。

(3) 由于布朗运动轨道连续, 当 $t \in [0, 1)$ 时, U_t 作为连续函数的复合, 几乎必然是连续的。我们只需验证在 $t=1$ 处的连续性, 即证明 $\lim_{t \rightarrow 1^-} U_t = 0$ a.s. 利用布朗运动的大数定律 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{B_u}{u} = 0$ a.s. 令 $u = \frac{t}{1-t}$, 当 $t \rightarrow 1^-$ 时, $u \rightarrow \infty$ 。

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} U_t = \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)B_{\frac{t}{1-t}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{1+u} B_u = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{1+u} \frac{B_u}{u} = 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{a.s.}$$

由于 $U_1 = 0$, 所以 U_t 在 $t=1$ 处几乎必然连续。综上所述, $\{U_t : 0 \leq t \leq 1\}$ 是标准布朗桥。 □

2. 假设 $\{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ 是长度为 1 的布朗桥。对任意 $0 < s < t < 1$, 试求 $P(X_u \neq 0, s < u < t)$ 。(注: 利用上题结论。)

Proof. 要计算事件 $A = \{X_u \neq 0, \forall u \in (s, t)\}$ 的概率, 其中 $0 < s < t < 1$ 。根据上一题的结论, 布朗桥 X_u 可以表示为 $X_u = (1-u)B_{\frac{u}{1-u}}$ 。因此, 条件 $X_u \neq 0$ 等价于 $(1-u)B_{\frac{u}{1-u}} \neq 0$ 。因为 $u \in (s, t) \subset (0, 1)$, 所以 $1-u \neq 0$, 这进一步等价于 $B_{\frac{u}{1-u}} \neq 0$ 。作时间代换 $\tau = \frac{u}{1-u}$ 。当 u 从 s 单调增加到 t 时, τ 从 $s' = \frac{s}{1-s}$ 单调增加到 $t' = \frac{t}{1-t}$ 。于是, 布朗桥在 (s, t) 内无零点的概率, 等于标准布朗运动在对应的 (s', t') 内无零点的概率:

$$P(X_u \neq 0, \forall u \in (s, t)) = P(B_\tau \neq 0, \forall \tau \in (s', t'))$$

根据我们在前面 (§3.2 习题 15) 学过的反正弦定律推论, 布朗运动在区间 (t_0, t_2) 内无零点的概率为 $\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_0}{t_2}}$. 代入 $t_0 = s'$ 和 $t_2 = t'$:

$$\begin{aligned} P(B_\tau \neq 0, \forall \tau \in (s', t')) &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s'}{t'}} \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\frac{s}{1-s}}{\frac{t}{1-t}}} \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s(1-t)}{t(1-s)}} \end{aligned}$$

因此, $P(X_u \neq 0, s < u < t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s(1-t)}{t(1-s)}}$. □

3. 假设 $\{U_t : 0 \leq t \leq 1\}$ 是布朗桥. 令 $W_t = (t+1)U_{t/(t+1)}, 0 \leq t \leq 1$. 证明: $\{W_t : t \geq 0\}$ 是标准布朗运动.

Proof. 已知 U 是标准布朗桥, 其协方差为 $\text{Cov}(U_x, U_y) = x(1-y)$ (对于 $x \leq y$). 定义 $W_t = (t+1)U_{\frac{t}{t+1}}$ 对所有 $t \geq 0$ 成立. 显然 $\{W_t\}$ 是高斯过程, 且因为布朗桥轨道连续且时间代换函数也是连续的, $\{W_t\}$ 轨道几乎必然连续.

验证均值: $E[W_t] = (t+1)E\left[U_{\frac{t}{t+1}}\right] = 0$.

验证协方差函数: 任取 $0 \leq s \leq t$. 由于 $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ 是单调递增的, 有 $\frac{s}{s+1} \leq \frac{t}{t+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t) &= E[W_s W_t] \\ &= (s+1)(t+1)E\left[U_{\frac{s}{s+1}} U_{\frac{t}{t+1}}\right] \\ &= (s+1)(t+1) \left(\frac{s}{s+1}\right) \left(1 - \frac{t}{t+1}\right) \\ &= (s+1)(t+1) \frac{s}{s+1} \frac{1}{t+1} \\ &= s \end{aligned}$$

因为 $s \leq t$, 这正是 $\min(s, t)$. 均值为 0, 协方差为 $\min(s, t)$ 的连续高斯过程就是标准布朗运动. 证明完毕. □

4. 对任意 $R \geq 0, T > 0$, 令

$$W_t := B_{R+t} - \left(\frac{T-t}{T}B_R + \frac{t}{T}B_{R+T}\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

证明: $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ 是长度为 T 的布朗桥, 并且它与 (B_R, B_{R+T}) 相互独立.

Proof. 定义 $W_t = B_{R+t} - \left(\frac{T-t}{T}B_R + \frac{t}{T}B_{R+T}\right)$ 对于 $t \in [0, T]$. 这表示我们截取了布朗运动从时刻 R 到 $R+T$ 的一段, 并减去了连接两个端点 (R, B_R) 和 $(R+T, B_{R+T})$ 的线性插值. 显然 $\{W_t\}$ 依然是零均值的连续高斯过程.

(1) 验证是长度为 T 的布朗桥: 我们需要验证 $\text{Cov}(W_s, W_t) = s - \frac{st}{T}$, 其中 $0 \leq s \leq t \leq T$. 展开 W_t 我们可以发现, 它是只依赖于区间 $[R, R+T]$ 内布朗增量的过程. 为了简化计算, 我们利用平稳增量性, 作平移 $B'_t = B_{R+t} - B_R$. 则 B' 是标准布朗运动, 且 $B'_0 = 0, B'_T = B_{R+T} - B_R$. 代入 W_t 的定义式:

$$\begin{aligned} W_t &= (B'_t + B_R) - \frac{T-t}{T}B_R - \frac{t}{T}(B'_T + B_R) \\ &= B'_t - \frac{t}{T}B'_T + B_R - \left(\frac{T-t}{T} + \frac{t}{T}\right)B_R \\ &= B'_t - \frac{t}{T}B'_T \end{aligned}$$

我们计算其协方差（对于 $0 \leq s \leq t \leq T$ ）：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t) &= \text{Cov}\left(B'_s - \frac{s}{T}B'_T, B'_t - \frac{t}{T}B'_T\right) \\ &= \text{Cov}(B'_s, B'_t) - \frac{t}{T}\text{Cov}(B'_s, B'_T) - \frac{s}{T}\text{Cov}(B'_T, B'_t) + \frac{st}{T^2}\text{Cov}(B'_T, B'_T) \\ &= s - \frac{t}{T}(s) - \frac{s}{T}(t) + \frac{st}{T^2}(T) \\ &= s - \frac{st}{T} - \frac{st}{T} + \frac{st}{T} \\ &= s - \frac{st}{T} \end{aligned}$$

这就是长度为 T 的布朗桥（由标准布朗桥 X_u 经时间拉伸得到 $W_t = \sqrt{T}X_{t/T}$ ）的协方差函数。且端点 $W_0 = B'_0 = 0$, $W_T = B'_T - B'_T = 0$ 。因此 W_t 是长度为 T 的布朗桥。

(2) 证明与 (B_R, B_{R+T}) 独立：因为所涉及的变量构成高斯系，要证明独立，只需证明 W_t 与 B_R 以及 B_{R+T} 的协方差分别为 0 即可。首先看与 B_R 的协方差：由于 $B'_t = B_{R+t} - B_R$ 是在时刻 R 之后的增量，它与 B_R 独立，即 $\text{Cov}(B'_t, B_R) = 0$ 且 $\text{Cov}(B'_T, B_R) = 0$ 。所以：

$$\text{Cov}(W_t, B_R) = \text{Cov}\left(B'_t - \frac{t}{T}B'_T, B_R\right) = 0$$

再看与 B_{R+T} 的协方差：注意 $B_{R+T} = B'_T + B_R$ 。

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_t, B_{R+T}) &= \text{Cov}\left(B'_t - \frac{t}{T}B'_T, B'_T + B_R\right) \\ &= \text{Cov}(B'_t, B'_T) - \frac{t}{T}\text{Cov}(B'_T, B'_T) + \text{Cov}(W_t, B_R) \\ &= t - \frac{t}{T} \cdot T + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

由于协方差为 0，高斯过程 W_t 与向量 (B_R, B_{R+T}) 相互独立。 □

5. 假设 $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ 是长度为 T 的布朗桥， $n \geq 1, t_0 := 0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} := T$ 。对 $r = 1, 2, \dots, n+1$ ，令 $T_r = t_r - t_{r-1}$ ，

$$X_t^{(r)} := W_{t_{r-1}+t} - \left(\frac{T_r-t}{T_r}W_{t_{r-1}} + \frac{t}{T_r}W_{t_r}\right), \quad 0 \leq t \leq T_r.$$

证明：

- (1) $\{X_t^{(r)} : 0 \leq t \leq T_r\}$ 是长度为 T_r 的布朗桥， $r = 1, 2, \dots, n+1$ ；
- (2) $\{X_t^{(1)} : 0 \leq t \leq T_1\}, \{X_t^{(2)} : 0 \leq t \leq T_2\}, \dots, \{X_t^{(n+1)} : 0 \leq t \leq T_{n+1}\}, (W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_{n+1}})$ 这 $n+2$ 个高斯系相互独立；
- (3) 若 $\{W_t\}$ 是标准布朗运动，则 (1) 和 (2) 仍然成立。

Proof. 5. 证明布朗桥的分段性质

(1) 注意 $X_t^{(r)}$ 的定义正好是对区间 $[t_{r-1}, t_r]$ 上的过程 W 减去连接两端点 $(t_{r-1}, W_{t_{r-1}})$ 和 (t_r, W_{t_r}) 的线性插值。这与上一题（第 4 题）的构造完全一致。

由第 4 题的证明结论，不论基过程 W 是布朗运动还是布朗桥（因为截取并减去线性插值后，两端点的值被强制归零，内部的协方差结构仅依赖于增量）， $X_t^{(r)}$ 的均值均为 0。

对其协方差，设 $0 \leq s \leq t \leq T_r$ ，我们有 $\text{Cov}(X_s^{(r)}, X_t^{(r)}) = s - \frac{st}{T_r}$ 。

这正是长度为 T_r 的布朗桥的协方差函数。且由于 W 连续， $X^{(r)}$ 亦连续。故 $X^{(r)}$ 是布朗桥。

(2) 我们要证明所有的片段过程 $\{X_t^{(r)}\}$ 与端点向量 $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ 相互独立，且各个片段之间相互独立。

由于涉及的所有随机变量均属于同一个中心化的高斯系，独立性等价于任意两者之间的协方差为 0。

首先，根据第 4 题的结论，对任一给定的子区间 r ，由于 $X_t^{(r)}$ 是通过减去端点的线性组合构造的，它必定与该区间的端点 $W_{t_{r-1}}$ 和 W_{t_r} 独立。更一般地，由于协方差的线性叠加性，它与任意其他节点 W_{t_k} 的协方差也为 0。这证明了 $\{X^{(r)}\}$ 与端点向量独立。

其次, 对于不同的子区间 $r \neq k$, 例如 $r < k$. 任取 $u \in [0, T_r], v \in [0, T_k]$. 由于 $X_u^{(r)}$ 与 W_{t_k} 和 $W_{t_{k-1}}$ 独立 (即与更晚发生的状态独立), 而 $X_v^{(k)}$ 又是 $W_{t_{k-1}+v}, W_{t_{k-1}}, W_{t_k}$ 的线性组合, 因此 $\text{Cov}(X_u^{(r)}, X_v^{(k)}) = 0$.

从而这 $n+2$ 个高斯系两两协方差为 0, 故它们相互独立。

(3) 结论 (1) 和 (2) 的证明中, 只用到了高斯过程的增量协方差结构。布朗运动和布朗桥在任意子区间内的“除去端点线性插值”后的增量结构是完全一致的 (因为端点约束已被线性插值项吸收)。

事实上, 第 4 题最初就是在标准布朗运动上证明的。因此若 W 是标准布朗运动, (1) 和 (2) 的所有代数验证依旧完全成立。 \square

6. 假设 $\{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ 是长度为 1 的布朗桥. 令

$$X_t^{(T)} := \sqrt{T}X_{t/T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

证明: $\{X_t^{(T)} : 0 \leq t \leq T\}$ 是长度为 T 的布朗桥.

Proof. 已知 X 是标准布朗桥, 即 $E[X_u] = 0, \text{Cov}(X_u, X_v) = u(1-v)$, 对于 $0 \leq u \leq v \leq 1$. 定义 $X_t^{(T)} = \sqrt{T}X_{t/T}$, 其中 $t \in [0, T]$. 因为时间尺度变换和常数乘法不改变高斯性和连续性, $\{X_t^{(T)}\}$ 是轨道连续的高斯过程。

验证均值: $E[X_t^{(T)}] = \sqrt{T}E[X_{t/T}] = 0$.

验证协方差函数: 任取 $0 \leq s \leq t \leq T$. 则 $0 \leq s/T \leq t/T \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_s^{(T)}, X_t^{(T)}) &= E[(\sqrt{T}X_{s/T})(\sqrt{T}X_{t/T})] \\ &= T \cdot E[X_{s/T}X_{t/T}] \\ &= T \left(\frac{s}{T}\right) \left(1 - \frac{t}{T}\right) \\ &= s \left(\frac{T-t}{T}\right) \\ &= s - \frac{st}{T} \end{aligned}$$

这正是长度为 T 的布朗桥的协方差函数。因此 $\{X_t^{(T)}\}$ 是长度为 T 的布朗桥。 \square

7*. 设 $\{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ 是布朗桥, 证明:

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} X_t > b\right) = e^{-2b^2}, \quad \forall b > 0.$$

Proof. 设 W_t 为一维标准布朗运动。布朗桥 X_t 可以视为给定终点 $W_1 = 0$ 时的条件布朗运动。即 $P(\max_{0 \leq t \leq 1} X_t > b) = P(\max_{0 \leq t \leq 1} W_t > b \mid W_1 = 0)$ 。

然而直接计算条件概率 $P(A \mid W_1 = 0)$ 由于 $P(W_1 = 0) = 0$ 而不严谨。严谨的做法是求极限:

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} X_t > b\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} W_t > b \mid |W_1| < \varepsilon\right)$$

为了避开复杂的极限推导, 我们直接使用联合密度函数积分。设 $M_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} W_t$. 由布朗运动的反射原理相关推导, (M_1, W_1) 的联合密度函数为:

$$f(m, x) = \frac{2(2m-x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2m-x)^2}{2}}, \quad \text{对 } m > 0, x \leq m$$

布朗桥在 $t=1$ 时的末值被约束在 0 处。利用条件密度公式:

$$f_{M_1|W_1}(m \mid 0) = \frac{f(m, 0)}{f_{W_1}(0)}$$

已知 $f_{W_1}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 代入:

$$f_{M_1|W_1}(m \mid 0) = \frac{\frac{4m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{4m^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} = 4me^{-2m^2}, \quad m > 0$$

这正是布朗桥最大值的概率密度函数。要求最大值大于 b 的概率，只需对其在 (b, ∞) 上积分：

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} X_t > b\right) = \int_b^\infty 4me^{-2m^2} dm$$

令 $u = 2m^2$ ，则 $du = 4mdm$ 。当 $m = b$ 时 $u = 2b^2$ ，当 $m \rightarrow \infty$ 时 $u \rightarrow \infty$ 。

$$\int_{2b^2}^\infty e^{-u} du = e^{-2b^2}$$

□

8. 记 $q_t(x, y)$ 是 O-U 过程的转移概率密度, $\phi(x)$ 是标准正态分布的密度函数. 证明:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_t(x, y) = \phi(y), \quad \text{且} \quad \int q_t(x, y) \phi(x) dx = \phi(y).$$

Proof. 已知标准 O-U 过程 V_t 的转移概率密度 $q_t(x, y)$ 为一个高斯密度。对于初始状态 $V_0 = x$, V_t 服从均值为 xe^{-t} , 方差为 $1 - e^{-2t}$ 的正态分布。

因此转移密度为:

$$q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-2t})}} \exp\left(-\frac{(y - xe^{-t})^2}{2(1 - e^{-2t})}\right)$$

证明点态收敛 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t(x, y) = \phi(y)$: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-t} \rightarrow 0$ 且 $e^{-2t} \rightarrow 0$ 。直接在密度函数中取极限:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} q_t(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - 0)}} \exp\left(-\frac{(y - x \cdot 0)^2}{2(1 - 0)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \phi(y) \end{aligned}$$

其中 $\phi(y)$ 正是标准正态分布的密度函数。

证明稳态分布积分不变性 $\int_{-\infty}^\infty q_t(x, y) \phi(x) dx = \phi(y)$: 这实际上是证明 $\phi(x)$ 是 O-U 过程的不变测度 (平稳分布)。

由于 $V_t = xe^{-t} + \sqrt{1 - e^{-2t}}Z$, 其中 $Z \sim N(0, 1)$ 且与初值 x 独立。若将初始值 $V_0 = x$ 赋予标准正态分布 $\phi(x)$, 则此时 V_t 是两个独立正态变量的线性组合。 V_t 依然服从正态分布。

计算其均值和方差:

- 均值: $E[V_t] = E[xe^{-t}] + E[\sqrt{1 - e^{-2t}}Z] = e^{-t} \cdot 0 + 0 = 0$
- 方差: $\text{Var}(V_t) = \text{Var}(xe^{-t}) + \text{Var}(\sqrt{1 - e^{-2t}}Z) = (e^{-t})^2 \cdot 1 + (\sqrt{1 - e^{-2t}})^2 \cdot 1 = e^{-2t} + 1 - e^{-2t} = 1$

因为 V_t 依然是均值为 0、方差为 1 的正态分布, 它的边缘密度就是 $\phi(y)$ 。

而由全概率公式, 从初值分布 $\phi(x)$ 演化 t 时间后的边缘密度由积分 $\int q_t(x, y) \phi(x) dx$ 给出。

所以二者必然相等:

$$\int_{-\infty}^\infty q_t(x, y) \phi(x) dx = \phi(y)$$

□

9. 记 $q_t(x, y)$ 是 O-U 过程的转移概率密度, 其中 $\alpha = 1$. 验证:

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (y q_t(x, y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} q_t(x, y).$$

Proof. 已知当 $\alpha = 1$ 时, 标准 O-U 过程的转移概率密度为:

$$q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-2t})}} \exp\left(-\frac{(y - xe^{-t})^2}{2(1 - e^{-2t})}\right)$$

为了简化记号, 令方差 $\sigma^2(t) = 1 - e^{-2t}$, 均值 $\mu(t) = xe^{-t}$ 。则 $q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} \exp\left(-\frac{(y - \mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right)$ 。注意导数: $\mu'(t) = -xe^{-t} = -\mu(t)$, 且 $(\sigma^2(t))' = 2e^{-2t} = 2(1 - \sigma^2(t))$ 。

首先计算等式左边 $\frac{\partial q_t}{\partial t}$ 。对 q_t 取对数求导更为方便：

$$\ln q_t = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2(t)) - \frac{(y - \mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}$$

对 t 求偏导：

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_t} \frac{\partial q_t}{\partial t} &= -\frac{(\sigma^2(t))'}{2\sigma^2(t)} - \frac{2(y - \mu(t))(-\mu'(t))\sigma^2(t) - (y - \mu(t))^2(\sigma^2(t))'}{2\sigma^4(t)} \\ &= -\frac{1 - \sigma^2(t)}{\sigma^2(t)} + \frac{(y - \mu(t))(-\mu'(t))}{\sigma^2(t)} + \frac{(y - \mu(t))^2(1 - \sigma^2(t))}{\sigma^4(t)} \end{aligned}$$

所以：

$$\frac{\partial q_t}{\partial t} = q_t \left[\frac{(y - \mu(t))^2 - \sigma^2(t) - \mu(t)(y - \mu(t))\sigma^2(t) - (y - \mu(t))^2\sigma^2(t)}{\sigma^4(t)} \right]$$

化简括号内的分子部分：分子 = $(y - \mu)^2 - \sigma^2 - \mu y \sigma^2 + \mu^2 \sigma^2 - y^2 \sigma^2 + 2\mu y \sigma^2 - \mu^2 \sigma^2 = (y - \mu)^2 - \sigma^2 + \mu y \sigma^2 - y^2 \sigma^2 = (y - \mu)^2 - \sigma^2 - y(y - \mu)\sigma^2$ 。所以：

$$\frac{\partial q_t}{\partial t} = q_t \left[\frac{(y - \mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} - \frac{y(y - \mu)}{\sigma^2} \right]$$

接下来计算等式右边。先求一阶偏导 $\frac{\partial q_t}{\partial y}$ ：

$$\frac{\partial q_t}{\partial y} = q_t \left(-\frac{y - \mu}{\sigma^2} \right)$$

等式右边第一项：

$$\frac{\partial}{\partial y}(yq_t) = q_t + y \frac{\partial q_t}{\partial y} = q_t - q_t \frac{y(y - \mu)}{\sigma^2} = q_t \left[1 - \frac{y(y - \mu)}{\sigma^2} \right]$$

等式右边第二项（二阶偏导）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_t}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-q_t \frac{y - \mu}{\sigma^2} \right) \\ &= -\frac{\partial q_t}{\partial y} \frac{y - \mu}{\sigma^2} - q_t \frac{1}{\sigma^2} \\ &= q_t \left(\frac{y - \mu}{\sigma^2} \right)^2 - q_t \frac{1}{\sigma^2} = q_t \left[\frac{(y - \mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

将右边两项相加：

$$\frac{\partial}{\partial y}(yq_t) + \frac{\partial^2 q_t}{\partial y^2} = q_t \left[1 - \frac{y(y - \mu)}{\sigma^2} + \frac{(y - \mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right]$$

对比左右两边，发现还差一个常数项 1。这是因为 $\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} - 1$ 。让我们重新核对左边 $\frac{\partial q_t}{\partial t}$ 的推导： $-\frac{(\sigma^2)'}{2\sigma^2} = -\frac{2(1 - \sigma^2)}{2\sigma^2} = -\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2} + 1$ 。代入回左边展开式，恰好补足了 +1 这个常数。因此，左右两边完全相等：

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (yq_t(x, y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} q_t(x, y)$$

□

10. 对任意 $t \geq 0$ ，令 $Y_t = e^{B_t}$ ，称 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 为几何布朗运动。假设 $y > 0$ ，试求：

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{E(Y_{t+\delta} - Y_t | Y_t = y)}{\delta} \quad \text{和} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{E((Y_{t+\delta} - Y_t)^2 | Y_t = y)}{\delta}.$$

Proof. 已知 $Y_t = e^{B_t}$ 。给定条件 $Y_t = y > 0$ ，这意味着在时刻 t 有 $B_t = \ln y$ 。考察时间增量 $\delta > 0$ ，有 $B_{t+\delta} = B_t + \Delta B$ ，其中 $\Delta B = B_{t+\delta} - B_t \sim N(0, \delta)$ ，且 ΔB 独立于 B_t （从而独立于 Y_t ）。

条件随机变量 $(Y_{t+\delta} | Y_t = y) = e^{B_t + \Delta B} |_{B_t = \ln y} = e^{\ln y + \Delta B} = ye^{\Delta B}$ 。

我们知道对数正态变量 $e^{\Delta B}$ 的矩母函数为 $E[e^{k\Delta B}] = e^{k^2\delta/2}$ 。因此，条件矩为： $E[Y_{t+\delta} | Y_t = y] = yE[e^{\Delta B}] = ye^{\delta/2}$ 。 $E[Y_{t+\delta}^2 | Y_t = y] = y^2E[e^{2\Delta B}] = y^2e^{2\delta}$ 。

计算第一个极限（无穷小漂移）：

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{E(Y_{t+\delta} - Y_t | Y_t = y)}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{ye^{\delta/2} - y}{\delta} \\ &= y \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{e^{\delta/2} - 1}{\delta}\end{aligned}$$

利用泰勒展开 $e^{\delta/2} \approx 1 + \frac{\delta}{2}$ ：

$$= y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}y$$

计算第二个极限（无穷小方差/扩散系数）：

$$\begin{aligned}E((Y_{t+\delta} - Y_t)^2 | Y_t = y) &= E(Y_{t+\delta}^2 - 2yY_{t+\delta} + y^2 | Y_t = y) \\ &= y^2 e^{2\delta} - 2y(ye^{\delta/2}) + y^2 \\ &= y^2(e^{2\delta} - 2e^{\delta/2} + 1)\end{aligned}$$

求极限：

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{y^2(e^{2\delta} - 2e^{\delta/2} + 1)}{\delta} &= y^2 \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{(1 + 2\delta + O(\delta^2)) - 2(1 + \frac{1}{2}\delta + O(\delta^2)) + 1}{\delta} \\ &= y^2 \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1 + 2\delta - 2 - \delta + 1}{\delta} \\ &= y^2 \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\delta}{\delta} = y^2\end{aligned}$$

□

注：这与伊藤公式 $dY_t = \frac{1}{2}Y_t dt + Y_t dB_t$ 给出的漂移系数 $1/2y$ 和二次变差系数 y^2 完全一致。

11. 对任意 $t \geq 0$, 令 $X_t = B_t - [B_t]$, 称 $\{X_t : t \geq 0\}$ 为圆周上的布朗运动. 证明 $\{X_t\}$ 是时齐马氏过程, 并求其转移密度函数.

Proof. 已知 $X_t = B_t - [B_t]$, 状态空间为 $S = [0, 1)$.

证明马氏性：任取 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$, 以及状态 $x_1, \dots, x_n, x \in [0, 1)$. 我们要证明 $P(X_t \leq y | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_t \leq y | X_{t_n} = x_n)$. 记 $\Delta t = t - t_n$. 因为 $B_t = B_{t_n} + (B_t - B_{t_n})$, 且增量 $\Delta B = B_t - B_{t_n}$ 独立于 $\sigma(B_s : s \leq t_n)$. 由于 X_s 是 B_s 的函数, ΔB 也独立于 $\sigma(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. $X_t = B_{t_n} + \Delta B - [B_{t_n} + \Delta B]$. 利用恒等式 $[a+b] = [a] + [b + \{a\}]$, 其中 $\{a\} = a - [a]$ 是小数部分. 代入得: $[B_{t_n} + \Delta B] = [B_{t_n}] + [X_{t_n} + \Delta B]$. 因此:

$$\begin{aligned}X_t &= B_{t_n} + \Delta B - ([B_{t_n}] + [X_{t_n} + \Delta B]) \\ &= (B_{t_n} - [B_{t_n}]) + \Delta B - [X_{t_n} + \Delta B] \\ &= X_{t_n} + \Delta B - [X_{t_n} + \Delta B]\end{aligned}$$

可以看出, X_t 完全由 X_{t_n} 和独立增量 ΔB 决定. 给定 X_{t_n} , 它与更早的历史状态条件独立. 因此 $\{X_t\}$ 是马尔可夫过程. 由于分布只依赖于时间差 Δt , 它是时齐的.

求转移密度函数：给定 $X_0 = x \in [0, 1)$, 我们需要求 X_t 的分布. 由于 $X_t = x + B_t - [x + B_t]$, 事件 $\{X_t \in dy\}$ 等价于 $x + B_t$ 落在 y 的模 1 同余系中. 即存在整数 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $x + B_t \in y + k + dy$. 这等价于 $B_t \in y - x + k + dy$. 由于 $B_t \sim N(0, t)$, 且各个整数平移事件互斥, 我们可以将全直线上 B_t 的概率密度按周期 1 折叠 (缠绕) 到区间 $[0, 1)$ 上:

$$p_t(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x+k)^2}{2t}\right), \quad x, y \in [0, 1)$$

这就是圆周布朗运动的转移密度函数.

□

12. 假设 $\{\vec{B}_t : t \geq 0\}$ 为 d 维标准布朗运动. 证明: $\{\|\vec{B}_t\| : t \geq 0\}$ 是马氏过程. (注: $\{\|\vec{B}_t\|\}$ 称为贝塞尔过程.)

Proof. 已知 d 维标准布朗运动 \vec{B}_t 。令 $R_t = \|\vec{B}_t\|$ 。要证明 $\{R_t : t \geq 0\}$ 是马氏过程。

根据 d 维布朗运动的马氏性，对于 $t > s$ ，条件分布 $(\vec{B}_t | \vec{B}_s = \vec{x})$ 与从 \vec{x} 出发演化时间 $t - s$ 的布朗运动同分布。即 $\vec{B}_t \stackrel{d}{=} \vec{x} + \vec{W}_{t-s}$ ，其中 \vec{W} 是独立的 d 维标准布朗运动。

因此，条件随机变量 $(R_t | \vec{B}_s = \vec{x}) = \|\vec{x} + \vec{W}_{t-s}\|$ 。

由于标准布朗运动在正交变换（旋转）下是不变的分布，向量 $\vec{x} + \vec{W}_{t-s}$ 的模长分布仅仅依赖于向量 \vec{x} 的模长 $\|\vec{x}\|$ ，而与 \vec{x} 的具体方向完全无关。

具体来说，我们可以通过旋转坐标系，使得第一个坐标轴与 \vec{x} 平行，那么 $\|\vec{x} + \vec{W}_{t-s}\|^2 \stackrel{d}{=} (\|\vec{x}\| + W^{(1)})^2_{t-s} + \sum_{i=2}^d (W^{(i)})^2_{t-s}$ ，这显然只依赖于 $\|\vec{x}\|$ 。

既然在给定全部状态 \vec{B}_s 时， R_t 的条件分布只依赖于 \vec{B}_s 的模长 $R_s = \|\vec{B}_s\|$ ，这意味着“舍弃方向信息”不会损失预测未来模长所需的任何信息。

所以，给定 $R_s = r$ 以及之前的历史 $\sigma(R_u : u \leq s)$ ， R_t 的条件分布与仅给定 $R_s = r$ 时的条件分布相同。

因此， $\{\|\vec{B}_t\|\}$ 满足马尔可夫性，是一个马氏过程。 \square

3.7 随机积分与随机微分方程简介

1. 设 Δ 为 $[0, t]$ 的划分. 证明当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时,

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_{(t_i+t_{i+1})/2} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

在 L^2 中的极限存在，并求此极限. (注：此极限称为 Stratonovich 积分.)

Proof. 设划分 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ ，区间长度 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 。记中点为 $\bar{t}_i = \frac{t_i+t_{i+1}}{2}$ 。

考察被求和项。由于增量可以拆分，我们有：

$$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} = (B_{t_{i+1}} - B_{\bar{t}_i}) + (B_{\bar{t}_i} - B_{t_i}) := \Delta B_i^+ + \Delta B_i^-$$

此时中点的值可以写为：

$$B_{\bar{t}_i} = B_{t_i} + (B_{\bar{t}_i} - B_{t_i}) = B_{t_i} + \Delta B_i^-$$

将被求和的每一项展开：

$$\begin{aligned} B_{\bar{t}_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) &= (B_{t_i} + \Delta B_i^-) (\Delta B_i^+ + \Delta B_i^-) \\ &= B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + (\Delta B_i^-)^2 + \Delta B_i^- \Delta B_i^+ \end{aligned}$$

于是，原和式可以拆分为三个部分 $S_n = I_n + Q_n + R_n$ ：

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta B_i^-)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_i^- \Delta B_i^+$$

我们分别计算这三部分当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时在 L^2 中的极限：

第一部分 I_n (Itô 积分近似和)：这是标准的 Itô 积分定义。根据 Itô 积分的 L^2 构造，当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时：

$$I_n \xrightarrow{L^2} \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

第二部分 Q_n (左半区间的二次变差)： $Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{\bar{t}_i} - B_{t_i})^2$ 。因为增量相互独立，且 $B_{\bar{t}_i} - B_{t_i} \sim N(0, \frac{\Delta t_i}{2})$ 。其期望为：

$$E[Q_n] = \sum_{i=0}^{n-1} E[(\Delta B_i^-)^2] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta t_i}{2} = \frac{t}{2}$$

其方差为（利用正态变量四阶矩 $E[Z^4] = 3\sigma^4$ ）：

$$\text{Var}(Q_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}((\Delta B_i^-)^2) = \sum_{i=0}^{n-1} 2 \left(\frac{\Delta t_i}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta t_i)^2 \leq \frac{1}{2} |\Delta| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = \frac{t}{2} |\Delta|$$

当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时， $\text{Var}(Q_n) \rightarrow 0$ 。因此 Q_n 在 L^2 中收敛于常数 $\frac{t}{2}$ 。

第三部分 R_n (交叉项): $R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_i^- \Delta B_i^+$. 由于布朗运动的独立增量性质, 不重叠区间的增量相互独立. ΔB_i^- 和 ΔB_i^+ 是相邻但不重叠区间的增量, 且均值为 0. 期望: $E[R_n] = \sum E[\Delta B_i^-]E[\Delta B_i^+] = 0$. 方差: 由于不同 i 的项互不相关,

$$\text{Var}(R_n) = \sum_{i=0}^{n-1} E[(\Delta B_i^-)^2(\Delta B_i^+)^2] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta t_i}{2} \frac{\Delta t_i}{2} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta t_i)^2 \leq \frac{t}{4} |\Delta|$$

当 $|\Delta| \rightarrow 0$ 时, $\text{Var}(R_n) \rightarrow 0$. 因此 R_n 在 L^2 中收敛于 0.

综上, 根据 L^2 极限的线性性质:

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_n = \left(\frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t \right) + \frac{t}{2} + 0 = \frac{1}{2} B_t^2$$

这证明了 Stratonovich 积分规则满足经典微积分中的链式法则 (即没有 Itô 校正项 $-\frac{1}{2}t$). □

2. 给定 $t > 0$, 令 $Y_t = \int_0^t B_s ds$.

(1) 求 Y_t 关于 B_t 的条件密度 $p_{Y_t|B_t}(y|x)$.

(2) 求 $Ee^{\lambda Y_t}$.

Proof. 已知 $Y_t = \int_0^t B_s ds$. 由于 Y_t 是高斯过程 $\{B_s\}$ 的线性泛函 (黎曼积分), 因此 (B_t, Y_t) 必然服从二维联合高斯分布. 我们首先计算这个二维高斯向量的均值向量和协方差矩阵:

- 均值: $E[B_t] = 0$; 由期望与积分交换顺序, 显然 $E[Y_t] = \int_0^t E[B_s] ds = 0$.
- B_t 的方差: $\text{Var}(B_t) = t$.
- B_t 与 Y_t 的协方差:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t, Y_t) &= E \left[B_t \int_0^t B_s ds \right] = \int_0^t E[B_t B_s] ds \\ &= \int_0^t \min(t, s) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

- Y_t 的方差:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= E \left[\left(\int_0^t B_u du \right) \left(\int_0^t B_v dv \right) \right] = \int_0^t \int_0^t E[B_u B_v] du dv \\ &= 2 \int_0^t dv \int_0^v E[B_u B_v] du = 2 \int_0^t dv \int_0^v u du \\ &= 2 \int_0^t \frac{v^2}{2} dv = \frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

(1) 由二维高斯分布的经典条件分布公式, 给定 $X = x$ 时, Y 服从正态分布, 其条件期望和条件方差为:

$$\begin{aligned} \mu_{Y|X} &= \mu_Y + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(x - \mu_X) \\ \sigma_{Y|X}^2 &= \text{Var}(Y) - \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{\text{Var}(X)} \end{aligned}$$

代入我们的参数 ($X = B_t, Y = Y_t$):

$$\begin{aligned} \mu_{Y_t|B_t=x} &= 0 + \frac{t^2/2}{t}(x - 0) = \frac{tx}{2} \\ \sigma_{Y_t|B_t=x}^2 &= \frac{t^3}{3} - \frac{(t^2/2)^2}{t} = \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{4} = \frac{t^3}{12} \end{aligned}$$

因此, 条件分布 $(Y_t | B_t = x) \sim N\left(\frac{tx}{2}, \frac{t^3}{12}\right)$. 其条件概率密度函数为:

$$p_{Y_t|B_t}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t^3/12)}} \exp\left(-\frac{(y - tx/2)^2}{2(t^3/12)}\right) = \sqrt{\frac{6}{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{6(2y - tx)^2}{4t^3}\right)$$

(2) 因为 $Y_t \sim N(0, \frac{t^3}{3})$, 这是一维正态分布。

根据正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的矩母函数公式 $M(\lambda) = \exp(\mu\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)$, 直接代入 $\mu = 0$ 和 $\sigma^2 = \frac{t^3}{3}$, 即得:

$$E[e^{\lambda Y_t}] = \exp\left(\frac{\lambda^2 t^3}{6}\right)$$

□

4 jdq 往年题

4.1 2019 秋期末

1. 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 为一离散参数的时齐马氏链, 取值空间 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(1) 设初始分布为 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/2$, $P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$, 求 $P(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 2)$ 。

(2) 求 X 的不变分布。

(3) 对任意初始分布 μ , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \mathbf{P}^n$ 。

(4) 设 f 为连续可微函数, 且 $f(1) = 2.1, f(2) = 1.4, f(3) = 0.7, f(4) = 4.2$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$$

Proof. (1) 根据马尔可夫性, 联合概率可以拆分为初始概率与各步转移概率的乘积:

$$P(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 2) = P(X_1 = 3) \cdot p_{34} \cdot p_{42}$$

而:

$$P(X_1 = 3) = \sum_{i=1}^4 P(X_0 = i) p_{i3} = \frac{1}{2} p_{13} + \frac{1}{2} p_{23} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{6}$$

代入得:

$$P(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

(2) 设不变分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$, 满足 $\pi \mathbf{P} = \pi$ 且 $\sum_{i=1}^4 \pi_i = 1$ 。得矩阵方程:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 \\ \pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 \end{cases}$$

由第一式得 $\frac{2}{3}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 \implies \pi_2 = \frac{4}{3}\pi_1$ 。将 π_2 代入第二式: $\frac{4}{3}\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_4 \implies \pi_4 = \pi_1$ 。由第四式得 $\frac{2}{3}\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3 \implies \pi_3 = \frac{4}{3}\pi_4 = \frac{4}{3}\pi_1$ 。将上述关系代入归一化条件:

$$\pi_1 + \frac{4}{3}\pi_1 + \frac{4}{3}\pi_1 + \pi_1 = \frac{14}{3}\pi_1 = 1 \implies \pi_1 = \frac{3}{14}$$

故不变分布为:

$$\pi = \left(\frac{3}{14}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{14} \right)$$

(3) 由状态空间有限, 所有状态互通, 故该马氏链是不可约的。又因为 $p_{11} = 1/3 > 0$, 状态 1 是非周期的。不可约链中一个状态非周期则全链非周期。由于状态空间有限、不可约且非周期, 该马氏链为遍历链 (正常返且非周期)。根据强遍历定理, 无论初始分布 μ 为何, 系统状态的概率分布最终都将收敛于唯一的不变分布 π :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \mathbf{P}^n = \pi = \left(\frac{3}{14}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{14} \right)$$

(4) 本问考察马氏链的遍历定理。对于不可约且正常返的马氏链, 沿轨道的时间平均以概率 1 收敛于空间平均 (关于不变分布的期望):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = E_{\pi}[f(X)] = \sum_{i=1}^4 \pi_i f(i) \quad \text{a.s.}$$

代入已知数据 $f(1) = 2.1, f(2) = 1.4, f(3) = 0.7, f(4) = 4.2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \pi_i f(i) &= \frac{3}{14}(2.1) + \frac{4}{14}(1.4) + \frac{4}{14}(0.7) + \frac{3}{14}(4.2) \\ &= \frac{27.3}{14} = 1.95 \end{aligned}$$

故该极限的值为 1.95。 □

2. 设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列, 共同服从分布 $P(\xi_1 = 1) = p, P(\xi_1 = -1) = 1 - p$; 设 $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, X_0 = 0, X = \{X_n : n \geq 0\}$;

- (1) 证明 X 为时齐马氏链;
- (2) 证明 X 常返当且仅当 $p = 1/2$ 。此时, X 是否正常返? 请说明理由。

Proof. (1) 对于任意时刻 $n \geq 0$, 以及任意状态序列 $i_0, i_1, \dots, i_n, j \in \mathbb{Z}$, 在 $P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) > 0$ 的条件下, 考察其条件概率:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P(X_n + \xi_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i_n \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \end{aligned}$$

由于序列 $\{\xi_k\}$ 独立同分布, ξ_{n+1} 与过去的随机变量及 X_0, \dots, X_n 相互独立。因此:

$$P(\xi_{n+1} = j - i_n \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(\xi_{n+1} = j - i_n)$$

这表明系统的未来状态 X_{n+1} 仅依赖于当前状态 X_n , 满足马尔可夫性。

其单步转移概率为:

$$p_{i,j} = P(\xi_{n+1} = j - i) = \begin{cases} p, & j = i + 1 \\ 1 - p, & j = i - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然转移概率 $p_{i,j}$ 的取值仅依赖于状态空间, 与时刻 n 无关, 因此 X 是时齐马氏链。

(2) 该马氏链在 \mathbb{Z} 上不可约, 故只需考察状态 0 的常返性。从 0 出发回到 0 必须经过偶数步 (记为 $2n$), 且向右和向左各走 n 步。故 $2n$ 步转移概率为:

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} (p(1-p))^n$$

当 n 很大时, 由 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ 展开:

$$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)^2} (p(1-p))^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n$$

状态 0 常返的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ 发散:

- 若 $p \neq 1/2$, 由均值不等式知 $p(1-p) < 1/4$, 从而 $4p(1-p) < 1$ 。此时级数呈几何级数衰减, 级数收敛, 马氏链非常返。
- 若 $p = 1/2$, 则 $4p(1-p) = 1$ 。此时 $p_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ 。由级数判别法知级数发散, 马氏链常返。

故 X 常返当且仅当 $p = 1/2$ 。

此时 X 不是正常返, 而是零常返。利用反证法。假设该链是正常返的, 则必然存在唯一的平稳分布 $\pi = \{\pi_j : j \in \mathbb{Z}\}$, 满足以下条件:

1. 转移方程: $\pi_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i P_{ij}$
2. 归一化条件: $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \pi_j = 1$ 且 $\pi_j > 0$

对于对称随机游走，其一步转移概率为 $P_{j,j+1} = 1/2$ 和 $P_{j,j-1} = 1/2$ 。代入转移方程得：

$$\pi_j = \frac{1}{2}\pi_{j-1} + \frac{1}{2}\pi_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

整理得：

$$\pi_{j+1} - \pi_j = \pi_j - \pi_{j-1}$$

这意味着序列 $\{\pi_j\}$ 是一个等差数列。设公差为 d ，则通项公式为：

$$\pi_j = \pi_0 + j \cdot d$$

下面分情况讨论：

- 若 $d \neq 0$ ，则当 $j \rightarrow \infty$ 或 $j \rightarrow -\infty$ 时， π_j 必然会趋于负无穷，这与 $\pi_j > 0$ 矛盾。
- 若 $d = 0$ ，则对于所有的 j ，有 $\pi_j = \pi_0$ 。
 - 若 $\pi_0 = 0$ ，则 $\sum \pi_j = 0 \neq 1$ ，矛盾。
 - 若 $\pi_0 > 0$ ，则 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \pi_0 = \infty \neq 1$ ，矛盾。

综上所述，不存在满足归一化条件的平稳分布 π 。因此，该链不可能是正常返的，只能是零常返。 \square

3. 设 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 为连续时间参数的时齐马氏链，取值空间 $S = \{0, 1\}$ 。设 $\tau = \inf\{t : X_t \neq X_0\}$ ，且 $P(\tau > t | X_0 = 0) = e^{-\lambda t}$, $P(\tau > t | X_0 = 1) = e^{-\mu t}$ 。

(1) 求 X 的转移速率矩阵 \mathbf{Q} ，并写出 $p_{00}(t), p_{11}(t)$ 满足的 Kolmogorov 前进方程；

(2) $\forall t > 0, i, j \in S$ ，求 $p_{ij}(t)$ 。

Proof. (1) 由题意可知，在状态 0 的逗留时间服从参数为 λ 的指数分布，因此离开状态 0 的总速率为 $q_0 = \lambda$ 。由于状态空间仅有 $S = \{0, 1\}$ ，从 0 只能跳跃到 1，故非对角线转移速率 $q_{01} = \lambda$ 。对角线元素 $q_{00} = -q_0 = -\lambda$ 。

同理，在状态 1 的逗留时间服从参数为 μ 的指数分布，离开状态 1 的总速率为 $q_1 = \mu$ ，且只能跳跃到 0，故 $q_{10} = \mu$ 。对角线元素 $q_{11} = -q_1 = -\mu$ 。

因此，该马氏链的转移速率矩阵 \mathbf{Q} 为：

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

根据 Kolmogorov 前进方程的矩阵形式 $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ ，写成分量形式有：

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= p_{00}(t)q_{00} + p_{01}(t)q_{10} = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t) \\ p'_{11}(t) &= p_{10}(t)q_{01} + p_{11}(t)q_{11} = \lambda p_{10}(t) - \mu p_{11}(t) \end{aligned}$$

由概率的归一性条件 $p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1$ 以及 $p_{10}(t) + p_{11}(t) = 1$ ，将 $p_{01}(t)$ 和 $p_{10}(t)$ 代换掉，可得 $p_{00}(t)$ 和 $p_{11}(t)$ 满足的单变量一阶常微分方程：

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\lambda p_{00}(t) + \mu(1 - p_{00}(t)) = \mu - (\lambda + \mu)p_{00}(t) \\ p'_{11}(t) &= \lambda(1 - p_{11}(t)) - \mu p_{11}(t) = \lambda - (\lambda + \mu)p_{11}(t) \end{aligned}$$

(2) 对于 $p_{00}(t)$ ，求解一阶常系数线性常微分方程：

$$p'_{00}(t) + (\lambda + \mu)p_{00}(t) = \mu$$

同乘积分因子 $e^{(\lambda+\mu)t}$ ：

$$\frac{d}{dt} \left(e^{(\lambda+\mu)t} p_{00}(t) \right) = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

从 0 到 t 积分：

$$e^{(\lambda+\mu)t} p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda+\mu)t} + C$$

通解为：

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + C e^{-(\lambda+\mu)t}$$

代入初始条件 $p_{00}(0) = 1$ ，解得常数 C ：

$$1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + C \implies C = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

因此:

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

由概率归一性得到:

$$p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

同理, 对于 $p_{11}(t)$, 求解完全对称的微分方程:

$$p'_{11}(t) + (\lambda + \mu)p_{11}(t) = \lambda$$

类似地, 解得通解为:

$$p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + C e^{-(\lambda + \mu)t}$$

代入初始条件 $p_{11}(0) = 1$, 解得 $C = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ 。因此:

$$p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

由概率归一性得:

$$p_{10}(t) = 1 - p_{11}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

综上所述, 对于任意 $t > 0$, 转移概率为:

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ p_{01}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ p_{10}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ p_{11}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \end{aligned}$$

□

4. 设 $N = \{N_t : t \geq 0\}$ 为参数为 λ 的泊松过程, $Y = \{Y_k : k \geq 0\}$ 为与 N 独立、取值于整数集 \mathbf{Z} 的离散时间马氏链, 转移概率矩阵为 $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{ij})_{i,j \in \mathbf{Z}}$ 。设 $X = \{X_t : t \geq 0\}$, $X_t = Y_{N_t}$ 。

- (1) $\forall 0 < s < t, i \leq j$ 求 $P(N_s = i | N_t = j)$ 。
- (2) 证明 X 为时齐马氏链, 并求其转移速率矩阵 \mathbf{Q} 和转移概率矩阵 \mathbf{P} 。
- (3) 设 $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ 为 Y 的不变分布, 证明它也是 X 的不变分布。

Proof. (1) 利用条件概率的定义以及泊松过程独立增量的性质, 代入参数为 λ 的泊松分布公式:

$$\begin{aligned} P(N_s = i | N_t = j) &= \frac{P(N_s = i, N_t = j)}{P(N_t = j)} \\ &= \frac{P(N_s = i, N_t - N_s = j - i)}{P(N_t = j)} \\ &= \frac{P(N_s = i)P(N_t - N_s = j - i)}{P(N_t = j)} \\ &= \frac{\left(e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^i}{i!}\right) \left(e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}\right)}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}} \\ &= \frac{j!}{i!(j-i)!} \frac{s^i (t-s)^{j-i}}{t^j} \\ &= \binom{j}{i} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{j-i} \end{aligned}$$

表明在给定 $[0, t]$ 时间内总共发生 j 次事件的条件下, 前 s 时间内发生事件的次数服从二项分布 $B(j, s/t)$ 。

(2) 对任意时刻 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$ 和对应的状态序列 $i_1, i_2, \dots, i_m, i, j$, 为了书写简便, 记历史事件为 $H = \{X_{t_m} = i_m, \dots, X_{t_1} = i_1\}$ 。根据条件概率的定义, 我们有:

$$P(X_{t+s} = j | X_t = i, H) = \frac{P(X_{t+s} = j, X_t = i, H)}{P(X_t = i, H)}$$

由于 $X_t = Y_{N_t}$, 我们对在这些时刻泊松过程 N 的取值 $n_1 \leq \dots \leq n_m \leq n \leq n+k$ 使用全概率公式展开。由于 Y 与 N 相互独立, 联合概率可以拆分为离散链 Y 的概率与泊松过程 N 的概率之积。

先考察分子:

$$\begin{aligned} & P(X_{t+s} = j, X_t = i, H) \\ &= \sum_{n_1 \leq \dots \leq n} \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_{n+k} = j, Y_n = i, Y_{n_m} = i_m, \dots, Y_{n_1} = i_1) \cdot P(N_{t+s} = n+k, N_t = n, N_{t_m} = n_m, \dots, N_{t_1} = n_1) \end{aligned}$$

利用离散马氏链 Y 的马氏性, 有:

$$P(Y_{n+k} = j, Y_n = i, \dots, Y_{n_1} = i_1) = P(Y_{n+k} = j | Y_n = i)P(Y_n = i, \dots, Y_{n_1} = i_1) = \hat{p}_{ij}^{(k)} P(Y_n = i, \dots, Y_{n_1} = i_1)$$

利用泊松过程 N 的独立增量性质, 有:

$$\begin{aligned} P(N_{t+s} = n+k, N_t = n, \dots, N_{t_1} = n_1) &= P(N_{t+s} - N_t = k)P(N_t = n, \dots, N_{t_1} = n_1) \\ &= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} P(N_t = n, \dots, N_{t_1} = n_1) \end{aligned}$$

将这两部分代回分子的求和式中, 并把与 k 相关的项分离出来:

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \sum_{n_1 \leq \dots \leq n} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}_{ij}^{(k)} P(Y_n = i, \dots, Y_{n_1} = i_1) \cdot e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} P(N_t = n, \dots, N_{t_1} = n_1) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}_{ij}^{(k)} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) \times \underbrace{\sum_{n_1 \leq \dots \leq n} P(Y_n = i, \dots, Y_{n_1} = i_1) P(N_t = n, \dots, N_{t_1} = n_1)}_{\text{恰好等于分母 } P(X_t = i, H)} \end{aligned}$$

将分子代回条件概率的定义式, 分母 $P(X_t = i, H)$ 被完美约掉:

$$P(X_{t+s} = j | X_t = i, X_{t_m} = i_m, \dots, X_{t_1} = i_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}_{ij}^{(k)} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = P(X_{t+s} = j | X_t = i)$$

$$p_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_n = j | Y_0 = i) P(N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{p}_{ij}^{(n)} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

写成矩阵的无穷级数形式:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbf{P}^n = e^{-\lambda t \mathbf{I}} e^{\lambda t \mathbf{P}} = e^{\lambda t (\mathbf{P} - \mathbf{I})}$$

转移速率矩阵是转移概率矩阵在 $t = 0$ 处的导数:

$$\mathbf{Q} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{\lambda t (\mathbf{P} - \mathbf{I})} \right|_{t=0} = \lambda (\mathbf{P} - \mathbf{I})$$

分量形式即为:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda \hat{p}_{ij}, & i \neq j \\ \lambda (\hat{p}_{ii} - 1), & i = j \end{cases}$$

(3) 已知 $\hat{\pi}$ 是离散链 Y 的不变分布, 满足全局平衡方程:

$$\hat{\pi} \mathbf{P} = \hat{\pi}$$

要证 $\hat{\pi}$ 也是连续链 X 的不变分布, 只需证 $\hat{\pi}$ 满足 X 的全局平衡方程 $\hat{\pi} \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ 。代入第(2)问求得的 $\mathbf{Q} = \lambda (\mathbf{P} - \mathbf{I})$:

$$\begin{aligned} \hat{\pi} \mathbf{Q} &= \hat{\pi} [\lambda (\mathbf{P} - \mathbf{I})] \\ &= \lambda (\hat{\pi} \mathbf{P} - \hat{\pi} \mathbf{I}) \\ &= \lambda (\hat{\pi} - \hat{\pi}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(或者也可以通过 $\hat{\pi} \mathbf{P}(t) = \hat{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbf{P}^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \hat{\pi} = \hat{\pi} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \hat{\pi}$ 来证明)。

□

5. 设 $B = \{B_t : t \geq 0\}$ 为一维零初值标准布朗运动, $f(t)$ 为连续可微函数, $X_t = \int_0^t f(s)dB_s, Y_t = \int_0^t f(s)B_s dB_s$ (Itô 积分)。

(1) 设 $0 < s < t$, 求 $B_s + B_t$ 服从的概率分布;

(2) 设 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, \lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E \left| \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t \right|^2 = 0.$$

(3) 求 X 的概率分布;

(4) 证明

$$Y_t = \frac{1}{2} \left(f(t)B_t^2 - \int_0^t (f'(s)B_s^2 + f(s)ds) \right).$$

Proof. (1) 已知 $0 < s < t$ 。为了利用布朗运动的独立增量性质, 我们将 $B_s + B_t$ 拆解为不重叠区间的增量:

$$B_s + B_t = B_s + (B_s + B_t - B_s) = 2B_s + (B_t - B_s)$$

根据标准布朗运动的定义: $B_s = B_s - B_0 \sim N(0, s)$, 所以 $2B_s \sim N(0, 4s)$ 。 $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ 。且由独立增量性可知, $2B_s$ 与 $B_t - B_s$ 相互独立。

由于两个独立的正态随机变量之和依然服从正态分布, 且其均值为各自均值之和, 方差为各自方差之和:

$$E[B_s + B_t] = 0 + 0 = 0$$

$$\text{Var}(B_s + B_t) = \text{Var}(2B_s) + \text{Var}(B_t - B_s) = 4s + (t - s) = 3s + t$$

因此, $B_s + B_t \sim N(0, 3s + t)$ 。

(2) 记 $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2$ 为区间划分下的平方变差和。我们要证明 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E[(Q_n - t)^2] = 0$ 。首先计算 Q_n 的期望:

$$E[Q_n] = \sum_{k=0}^{n-1} E[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2] = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = t_n - t_0 = t$$

这说明要证明的式子 $E[(Q_n - t)^2]$ 实际上正是 Q_n 的方差 $\text{Var}(Q_n)$ 。

由于布朗运动具有独立增量, 被求和的各项相互独立, 因此和的方差等于方差的和:

$$\text{Var}(Q_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2)$$

对于服从 $N(0, \sigma^2)$ 的正态随机变量 Z , 其四阶中心矩为 $E[Z^4] = 3\sigma^4$, 故 $\text{Var}(Z^2) = E[Z^4] - (E[Z^2])^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$ 。在此题中, $\sigma^2 = t_{k+1} - t_k$ 。代入上式:

$$\text{Var}(Q_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2(t_{k+1} - t_k)^2$$

由于 $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$, 我们可以提取出一个 λ 进行放缩:

$$\text{Var}(Q_n) \leq 2\lambda \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = 2\lambda t$$

当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 对于固定的 t , $2\lambda t \rightarrow 0$ 。因此 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E[(Q_n - t)^2] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \text{Var}(Q_n) = 0$ 。

(3) 已知 $X_t = \int_0^t f(s)dB_s$ 。由于被积函数 $f(s)$ 是非随机的连续可微函数, 因此在有界闭区间 $[0, t]$ 上 $f(s)$ 是平方可积的 (即 $\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$)。对于确定性函数的 Itô 积分, 其结果必然服从高斯分布, 只需确定其均值和方差:

均值: 根据 Itô 积分的鞅性质, $E[X_t] = E \left[\int_0^t f(s)dB_s \right] = 0$ 。

方差: 根据 Itô 等距同构 (Itô Isometry),

$$\text{Var}(X_t) = E[X_t^2] = E \left[\left(\int_0^t f(s)dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t E[f(s)^2] ds = \int_0^t f(s)^2 ds$$

因此, X_t 服从正态分布: $X_t \sim N\left(0, \int_0^t f(s)^2 ds\right)$ 。

(4) 设二元函数 $g(x, s) = f(s)x^2$ 。因为 $f(s)$ 连续可微, 该函数对 s 一阶连续可导, 对 x 二阶连续可导。计算其偏导数:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = f'(s)x^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2f(s)x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2f(s)$$

对随机过程 $g(B_t, t) = f(t)B_t^2$ 应用 Itô 公式:

$$d(f(t)B_t^2) = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dB_t)^2$$

代入偏导数结果, 并使用乘法规则 $(dB_t)^2 = dt$:

$$d(f(t)B_t^2) = f'(t)B_t^2 dt + 2f(t)B_t dB_t + \frac{1}{2}(2f(t))dt$$

化简为:

$$d(f(t)B_t^2) = (f'(t)B_t^2 + f(t))dt + 2f(t)B_t dB_t$$

对上式两端在 $[0, t]$ 上进行积分 (注意初值 $f(0)B_0^2 = 0$):

$$f(t)B_t^2 - 0 = \int_0^t (f'(s)B_s^2 + f(s))ds + 2 \int_0^t f(s)B_s dB_s$$

通过移项, 将所求的 Itô 积分 $Y_t = \int_0^t f(s)B_s dB_s$ 单独留在等式一侧:

$$2 \int_0^t f(s)B_s dB_s = f(t)B_t^2 - \int_0^t (f'(s)B_s^2 + f(s))ds$$

两边同时除以 2 即可得到:

$$Y_t = \frac{1}{2} \left(f(t)B_t^2 - \int_0^t (f'(s)B_s^2 + f(s))ds \right)$$

□

4.2 2022 秋期末

1. 离散时间马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- (1) 求 $P(X_0 = 1, X_1 = 4, X_2 = 2, X_3 = 3)$ 。
- (2) 求不变分布 π ，并验证其是否为可逆分布。
- (3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ 。

Proof. (1) 根据马尔可夫性，联合概率可以分解为初始概率与各步转移概率的连乘：

$$P(X_0 = 1, X_1 = 4, X_2 = 2, X_3 = 3) = P(X_0 = 1)p_{14}p_{42}p_{23} = P(X_0 = 1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}P(X_0 = 1)$$

(注：回忆版题目未给出初始分布 $P(X_0 = 1)$ 的数值，若默认从状态 1 出发即 $P(X_0 = 1) = 1$ ，则结果为 $1/48$ 。)

(2) 设不变分布为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ ，满足 $\pi\mathbf{P} = \pi$ 且 $\sum_{i=1}^4 \pi_i = 1$ 。展开线性方程组：

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_4 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 \end{cases}$$

由第一式和第四式可得： $\pi_1 = \pi_4$ 。由第二式和第三式对比可得： $\frac{1}{3}\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \implies \pi_2 = \pi_3$ 。

将 $\pi_1 = \pi_4$ 代入第二式：

$$\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_1 \implies \frac{2}{3}\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 \implies \pi_1 = \frac{4}{3}\pi_2$$

代入归一化条件 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$ ：

$$\frac{4}{3}\pi_2 + \pi_2 + \pi_2 + \frac{4}{3}\pi_2 = 1 \implies \frac{14}{3}\pi_2 = 1 \implies \pi_2 = \frac{3}{14}$$

从而解得 $\pi_1 = \pi_4 = \frac{2}{7}$ ， $\pi_3 = \frac{3}{14}$ 。故不变分布为：

$$\pi = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}, \frac{2}{7} \right)$$

接下来验证该分布是否为可逆分布。只需验证细致平衡条件 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ 对所有 i, j 成立：

- 对于 (1, 2): $\pi_1 p_{12} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ ， $\pi_2 p_{21} = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ ，成立。
- 对于 (1, 3): $\pi_1 p_{13} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ ， $\pi_3 p_{31} = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ ，成立。
- 对于 (1, 4): $\pi_1 p_{14} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ ， $\pi_4 p_{41} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ ，成立。
- 对于 (2, 3): $\pi_2 p_{23} = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ ， $\pi_3 p_{32} = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ ，成立。
- 对于 (2, 4): $\pi_2 p_{24} = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ ， $\pi_4 p_{42} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ ，成立。
- 对于 (3, 4): $\pi_3 p_{34} = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ ， $\pi_4 p_{43} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ ，成立。

由于 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ 恒成立，故 π 是可逆分布。

(3) 观察转移矩阵可知，所有状态均互通（不可约），且主对角线上存在非零元素（如 $p_{11} = 1/4 > 0$ ），故该马氏链是非周期的。作为有限状态的不可约非周期马氏链，它是正常返的（遍历链）。根据遍历定理，函数沿轨道的时间平均以概率 1 收敛于关于不变分布的空间平均：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = E_{\pi}[f(X)] = \sum_{i=1}^4 \pi_i f(i) \quad \text{a.s.}$$

将求得的 π 代入：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \frac{2}{7}f(1) + \frac{3}{14}f(2) + \frac{3}{14}f(3) + \frac{2}{7}f(4)$$

□

2. 泊松过程 $\{N_t\}$ 参数为 λ 。

(1) 求 $E[N_s N_t]$ ($t > s > 0$)。

(2) 用大数定律证明 $P(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda) = 1$ 。

Proof. (1) 利用泊松过程的独立增量性质，将 N_t 拆分为 $N_s + (N_t - N_s)$ 从而得到：

$$E[N_s N_t] = E[N_s(N_s + (N_t - N_s))] = E[N_s^2] + E[N_s(N_t - N_s)]$$

根据独立增量性质，增量 $(N_t - N_s)$ 与 N_s 相互独立。同时，根据平稳增量性质：

$$N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s)) \quad \text{且} \quad N_s \sim \text{Poisson}(\lambda s)$$

因此第二项：

$$E[N_s(N_t - N_s)] = E[N_s]E[N_t - N_s] = (\lambda s)(\lambda(t - s)) = \lambda^2 st - \lambda^2 s^2$$

对于第一项二阶矩 $E[N_s^2]$ ，由泊松分布的期望和方差均为 λs ：

$$E[N_s^2] = \text{Var}(N_s) + (E[N_s])^2 = \lambda s + (\lambda s)^2 = \lambda s + \lambda^2 s^2$$

故

$$E[N_s N_t] = (\lambda s + \lambda^2 s^2) + (\lambda^2 st - \lambda^2 s^2) = \lambda^2 st + \lambda s$$

(2) 要证明这几乎处处成立，我们需要建立“计数变量 N_t ”和“到达时刻序列 S_n ”之间的双射对偶关系，从而利用经典的大数定律。

设 $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ 为该泊松过程相邻两次事件发生的时间间隔（即逗留时间）。由泊松过程的定义可知，序列 $\{T_i\}$ 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ 。因此，期望为 $E[T_i] = \frac{1}{\lambda}$ 。

设 $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ 为第 n 个事件发生的绝对时刻。由于 $\{T_i\}$ 是独立同分布的随机变量序列且期望有限，根据强大数定律（SLLN）：

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\lambda}\right) = 1$$

即几乎处处（a.s.）有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$ 。

根据泊松过程计数的物理意义，在任意时刻 t ，必然有“第 N_t 个事件已经发生，而第 $N_t + 1$ 个事件尚未发生”。这就给出了严格的时间不等式：

$$S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$$

将不等式各项同时除以 N_t （由于当 $t \rightarrow \infty$ 时， $N_t \rightarrow \infty$ a.s.，所以分母有意义）：

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{S_{N_t+1}}{N_t}$$

为了凑出大数定律的形式，对右侧放缩变形：

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}$$

现在，对不等式两端取 $t \rightarrow \infty$ （等价于 $N_t \rightarrow \infty$ ）的极限：

- 左端的极限为： $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \frac{1}{\lambda}$ a.s.
- 右端的极限为： $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$ a.s.

根据夹逼定理，中间项的极限也必然收敛于同一个值：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N_t} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{a.s.}$$

最后两边同时取倒数，即得：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \quad \text{a.s.}$$

从而得证 $P(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda) = 1$ 。

□

3. $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 是连续时间马氏链, 取值空间 $S = \{0, 1\}$. 记 $\tau = \inf\{t : X_t \neq X_0\}$, 已知 $P(\tau > t | X_0 = 0) = e^{-\lambda t}, P(\tau > t | X_0 = 1) = e^{-\mu t}$.

- (1) 求转移速率矩阵 \mathbf{Q} , 并写出 $p_{00}(t), p_{11}(t)$ 满足的 Kolmogorov 前进方程。
- (2) 求 $p_{ij}(t), \forall i, j \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$.

Proof. 同 2019 年第 3 题。 □

4. $N = \{N_t\}$ 为参数为 λ 的泊松过程, $Y = \{Y_k\}$ 为与 N 独立的离散时间参数马氏链, 取值在 \mathbb{Z} 上, 转移概率矩阵为 $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{ij})$. 设 $X = \{X_t : t \geq 0\}, X_t = Y_{N_t}$.

- (1) 证明 X 是时齐马氏链, 并求其速率矩阵 \mathbf{Q} 和转移概率矩阵 \mathbf{P} .
- (2) 若 $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 是 Y 的不变分布, 证明其也是 X 的不变分布。

Proof. 同 2019 年第 4 题。 □

5. $B = \{B_t, t \geq 0\}$ 为 0 初值一维标准布朗运动, $f(t)$ 连续可微. $X_t = \int_0^t f(s)dB_s, Y_t = \int_0^t f(s)B_sdB_s$.

- (1) 求 (B_r, B_s, B_t) 的联合密度 ($r < s < t$).
- (2) 证明 $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$ 也是标准布朗运动。
- (3) 求 X_t 的分布。
- (4) 证明 $Y_t = \frac{1}{2}[tB_t^2 - \int_0^t (B_s^2 + s)ds]$.

Proof. (1) 布朗运动具有独立增量性质, 且增量服从正态分布. 我们可以通过线性变换将联合密度转化为独立增量的乘积. 考虑增量向量 $(Z_1, Z_2, Z_3) = (B_r, B_s - B_r, B_t - B_s)$. 由定义, 它们相互独立, 且分布分别为: $Z_1 \sim N(0, r)$, 密度为 $p_r(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp(-\frac{z_1^2}{2r})$

$$Z_2 \sim N(0, s-r), \text{ 密度为 } p_{s-r}(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-r)}} \exp(-\frac{z_2^2}{2(s-r)})$$

$$Z_3 \sim N(0, t-s), \text{ 密度为 } p_{t-s}(z_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp(-\frac{z_3^2}{2(t-s)})$$

由于独立性, 它们的联合密度为 $f_{Z_1, Z_2, Z_3}(z_1, z_2, z_3) = p_r(z_1)p_{s-r}(z_2)p_{t-s}(z_3)$.

设原变量为 $x = B_r, y = B_s, z = B_t$. 则线性代换关系为: $z_1 = x, z_2 = y - x, z_3 = z - y$. 该线性变换的雅可比矩阵为下三角矩阵, 对角线全为 1, 故雅可比行列式的绝对值为 1. 因此, (B_r, B_s, B_t) 的联合密度函数就是增量密度的直接代入:

$$\begin{aligned} f_{B_r, B_s, B_t}(x, y, z) &= p_r(x)p_{s-r}(y-x)p_{t-s}(z-y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{r(s-r)(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2r} - \frac{(y-x)^2}{2(s-r)} - \frac{(z-y)^2}{2(t-s)}\right) \end{aligned}$$

(2) 令 $W_t = tB_{1/t}$, 且约定 $W_0 = 0$. 显然 $\{W_t\}$ 是高斯过程. 我们要证明它是连续的且均值与协方差结构与标准布朗运动相同.

验证均值: 对任意 $t > 0$, $E[W_t] = tE[B_{1/t}] = 0. W_0 = 0$.

验证协方差: 任取 $0 < s < t$. 由于 $\frac{1}{t} < \frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t) &= E[W_s W_t] = E[(sB_{1/s})(tB_{1/t})] \\ &= stE[B_{1/s}B_{1/t}] \\ &= st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = st\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= s \end{aligned}$$

这正是 $\min(s, t)$. 协方差结构与布朗运动完全一致.

验证连续性: 当 $t > 0$ 时, 由于 B_t 连续, W_t 显然连续. 只需 $t = 0$ 处的连续性, 即证明 $\lim_{t \rightarrow 0^+} tB_{1/t} = 0$ a.s.

令 $u = 1/t$, 当 $t \rightarrow 0+$ 时, $u \rightarrow \infty$ 。

$$\lim_{t \rightarrow 0+} tB_{1/t} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{B_u}{u} = 0 \quad \text{a.s.}$$

(最后一个等号由布朗运动的大数定律保证)。因此 $\{W_t\}$ 几乎必然连续。综上, $\{W_t\}$ 满足标准布朗运动的定义。

(3) 由于 $f(s)$ 是确定的 (非随机) 连续可微函数, 因此在 $[0, t]$ 上满足 $\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$ 。

对确定性函数的随机积分 (Wiener 积分), 其结果必然服从正态分布。

根据 Itô 积分的鞅性质, $E[X_t] = 0$ 。

根据 Itô 等距同构, $\text{Var}(X_t) = E \left[\left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t f(s)^2 ds$ 。

因此, $X_t \sim N \left(0, \int_0^t f(s)^2 ds \right)$ 。

(4) 此处题目可能有误, 对比题目给出的 Y_t 结果, 等式右侧对应于将 $f(s)$ 取为 s 时的化简形式。为使等式成立, 我们将 Y_t 视作 $\int_0^t s B_s dB_s$ 进行证明。

令二元函数 $g(x, t) = tx^2$ 。应用 Itô 公式求 $g(B_t, t)$ 的随机微分: 偏导数为: $\frac{\partial g}{\partial t} = x^2$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2tx$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2t$ 。

$$d(tB_t^2) = B_t^2 dt + 2tB_t dB_t + \frac{1}{2}(2t)(dB_t)^2$$

利用二次变差 $(dB_t)^2 = dt$ 代入:

$$d(tB_t^2) = B_t^2 dt + 2tB_t dB_t + t dt = (B_t^2 + t) dt + 2tB_t dB_t$$

对两边从 0 到 t 积分 (初值 $0 \cdot B_0^2 = 0$):

$$tB_t^2 = \int_0^t (B_s^2 + s) ds + 2 \int_0^t s B_s dB_s$$

将 $\int_0^t s B_s dB_s$ 作为 Y_t 孤立出来, 移项得:

$$2Y_t = tB_t^2 - \int_0^t (B_s^2 + s) ds$$

两边同除以 2 即可得证:

$$Y_t = \frac{1}{2} \left[tB_t^2 - \int_0^t (B_s^2 + s) ds \right]$$

□

4.3 2023 春第一次小测

1. (16分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取值于 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 的离散时间参数时齐马氏链, 转移阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- (1) (8分) 若 X 的初始分布为 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$, $P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$, 计算概率 $P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 4)$ 。
 (2) (8分) $\forall i = 1, 2, 3, 4$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i)$ 。

Proof. (1) 根据马尔可夫性, 路径概率可以分解为:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 4) &= \sum_{i=1}^4 P(X_0 = i) P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 4 | X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^4 P(X_0 = i) \cdot p_{i3} \cdot p_{32} \cdot p_{24} \end{aligned}$$

已知初始分布为 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0.5$, 其余为 0, 查转移矩阵 \mathbf{P} 得相关转移概率, 代入计算:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 4) &= (P(X_0 = 1) \cdot p_{13} + P(X_0 = 2) \cdot p_{23}) \cdot p_{32} \cdot p_{24} \\ &= (0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5) \times 0.5 \times 0.5 \\ &= (0.2 + 0.25) \times 0.25 \\ &= 0.45 \times 0.25 = 0.1125 \end{aligned}$$

(2) 显然, 由矩阵 \mathbf{P} 可见, 任意两个状态之间均可达, 且状态空间有限, 故该链是不可约正常返的。且由 $p_{11} = 0.3 > 0, p_{44} = 0.3 > 0$, 说明该链是非周期的。因此, 极限分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ 存在且等于唯一的不变分布, 满足 $\pi \mathbf{P} = \pi$ 且 $\sum \pi_i = 1$ 。

列方程:

$$\begin{cases} 0.3\pi_1 + 0.5\pi_3 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.5\pi_3 + 0.4\pi_4 = \pi_2 \\ 0.4\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.3\pi_4 = \pi_3 \\ 0.5\pi_2 + 0.3\pi_4 = \pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

由第一个方程得: $0.7\pi_1 = 0.5\pi_3 \implies \pi_3 = \frac{7}{5}\pi_1$ 。由第四个方程得: $0.5\pi_2 = 0.7\pi_4 \implies \pi_4 = \frac{5}{7}\pi_2$ 。将 π_3 代入第二个方程: $0.3\pi_1 + 0.5(\frac{7}{5}\pi_1) + 0.4\pi_4 = \pi_2 \implies \pi_1 + 0.4(\frac{5}{7}\pi_2) = \pi_2 \implies \pi_1 = \frac{5}{7}\pi_2$ 。由此可知 $\pi_1 = \pi_4 = \frac{5}{7}\pi_2$, 且 $\pi_3 = \frac{7}{5}\pi_1 = \pi_2$ 。代入归一化条件:

$$\frac{5}{7}\pi_2 + \pi_2 + \pi_2 + \frac{5}{7}\pi_2 = 1 \implies \frac{24}{7}\pi_2 = 1 \implies \pi_2 = \frac{7}{24}$$

计算各分量: $\pi_2 = \frac{7}{24}$, $\pi_3 = \frac{7}{24}$, $\pi_1 = \frac{5}{24}$, $\pi_4 = \frac{5}{24}$ 。故极限分布为: $(\frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24})$ 。□

2. (16分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取非负整数值的离散时间参数时齐马氏链, 转移阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$ 的元素如下: $\forall i \geq 0, p_{i,i+1} = p \in (0, 1), p_{i0} = 1 - p, p_{ij} = 0 (\forall j \neq 0, i + 1)$ 。令 $\sigma_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$ 。

- (1) (8分) 求给定 $X_0 = 0$ 的条件下 σ_0 的概率分布列 $P_0(\sigma_0 = n) (n \geq 1)$ 。
 (2) (8分) 马氏链 X 是否正常返? 为什么?

Proof. (1) σ_0 是从状态 0 出发首次回到状态 0 的时间。分析路径情况:

- 若 $\sigma_0 = 1$: 意味着第一步就从 0 回到 0。由转移矩阵知, $p_{00} = 1 - p$ 。
- 若 $\sigma_0 = 2$: 意味着路径为 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ 。概率为 $p_{01} \cdot p_{10} = p(1 - p)$ 。

- 若 $\sigma_0 = n$ ($n \geq 2$): 意味着前 $n-1$ 步都在不断往上走 ($0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \cdots \rightarrow n-1$), 而第 n 步从 $n-1$ 回到了 0。

对应的路径概率为:

$$P_0(\sigma_0 = n) = p_{01} \cdot p_{12} \cdots p_{n-2, n-1} \cdot p_{n-1, 0}$$

代入转移概率 $p_{i, i+1} = p$ 和 $p_{i0} = 1 - p$:

$$P_0(\sigma_0 = n) = p^{n-1}(1-p), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由此可见, σ_0 服从参数为 $1-p$ 的几何分布。

(2) 首先判定常返性。计算回返概率:

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(\sigma_0 = n) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p) = (1-p) \frac{1}{1-p} = 1$$

由于 $f_{00} = 1$, 状态 0 是常返的。又因为该链显然是不可约的 (任意状态 i 均可经 $i \rightarrow 0$ 回到原点, 且从 0 出发可达任意 j), 故全链常返。

接下来判定是否为正常返。计算平均回返时间 $E_0\sigma_0$:

$$E_0\sigma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_0(\sigma_0 = n) = \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}(1-p)$$

记级数部分为 $T = \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}$ 。考虑其前 n 项和 T_n :

$$T_n = 1 + 2p + 3p^2 + \cdots + np^{n-1}$$

两边同时乘以 p , 得:

$$pT_n = p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots + np^n$$

错位相减, 利用等比数列求和公式, 得:

$$(1-p)T_n = \frac{1-p^n}{1-p} - np^n$$

由于 $p \in (0, 1)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $p^n \rightarrow 0$ 且 $np^n \rightarrow 0$ 。因此:

$$(1-p)T = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)T_n = \frac{1}{1-p} \implies T = \frac{1}{(1-p)^2}$$

将级数结果 T 代入期望公式:

$$E_0\sigma_0 = (1-p) \cdot T = (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p}$$

由于 $p \in (0, 1)$, 故 $1-p > 0$, 从而 $E_0\sigma_0 = \frac{1}{1-p} < \infty$ 。故马氏链正常返。 \square

3. (8分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取值于可数集 S 的离散时间参数马氏链。证明: $\forall n \geq 1, i, j \in S, B_k \subset S$ ($0 \leq k \leq n-1$), 有

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Proof. 根据条件概率的定义, 等式左侧可以表示为:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1) = \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1)}{P(X_n = i, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1)}$$

记事件 $E = \{X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1\}$ 。由于 S 是可数集, 事件 E 可以表示为所有满足 $i_k \in B_k$ 的具体路径的互斥并集:

$$E = \bigcup_{i_0 \in B_0, \dots, i_{n-1} \in B_{n-1}} \{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

利用全概率公式, 对分子进行展开:

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = j, X_n = i, E) \\ &= \sum_{i_0 \in B_0} \cdots \sum_{i_{n-1} \in B_{n-1}} P(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \end{aligned}$$

由马尔可夫链的定义可知:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_0 \in B_0} \cdots \sum_{i_{n-1} \in B_{n-1}} P(X_{n+1} = j | X_n = i) P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\
 &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \sum_{i_0 \in B_0} \cdots \sum_{i_{n-1} \in B_{n-1}} P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\
 &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) P(X_n = i, E)
 \end{aligned}$$

代入初始的条件概率表达式中:

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = j | X_n = i, E) &= \frac{P(X_{n+1} = j | X_n = i) P(X_n = i, E)}{P(X_n = i, E)} \\
 &= P(X_{n+1} = j | X_n = i)
 \end{aligned}$$

□

4. (10分) 设 $\{X_n : n \geq 0\}$ 是独立同分布随机变量列, 服从分布: $P(X_n = 1) = \frac{2}{3}, P(X_n = -1) = \frac{1}{3}$ 。定义滑动平均

$$\xi_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1}), \forall n \geq 1.$$

$\xi = \{\xi_n : n \geq 1\}$ 是否是马氏链? 为什么?

Proof. $\xi = \{\xi_n : n \geq 1\}$ 不是马氏链。

首先确定 ξ_n 的取值范围。由于 $X_n \in \{1, -1\}$, 则 $\xi_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1})$ 的可能取值为:

$$S_\xi = \{1, 0, -1\}$$

具体对应关系为:

- $\xi_n = 1 \iff X_n = 1, X_{n-1} = 1$
- $\xi_n = 0 \iff X_n = 1, X_{n-1} = -1$ 或 $X_n = -1, X_{n-1} = 1$
- $\xi_n = -1 \iff X_n = -1, X_{n-1} = -1$

我们通过反证法, 观察 $P(\xi_3 | \xi_2, \xi_1)$ 是否依赖于 ξ_1 。考虑以下两种路径:

1. **路径甲:** $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0$ 。由 $\xi_1 = 1$ 知 $X_0 = 1, X_1 = 1$; 由 $\xi_2 = 0$ 且 $X_1 = 1$ 知 $X_2 = -1$ 。此时, $\xi_3 = \frac{1}{2}(X_3 + X_2) = \frac{1}{2}(X_3 - 1)$ 。要使 $\xi_3 = 0$, 必须 $X_3 = 1$ 。其条件概率为:

$$P(\xi_3 = 0 | \xi_2 = 0, \xi_1 = 1) = P(X_3 = 1) = \frac{2}{3}$$

2. **路径乙:** $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$ 。由 $\xi_1 = -1$ 知 $X_0 = -1, X_1 = -1$; 由 $\xi_2 = 0$ 且 $X_1 = -1$ 知 $X_2 = 1$ 。此时, $\xi_3 = \frac{1}{2}(X_3 + X_2) = \frac{1}{2}(X_3 + 1)$ 。要使 $\xi_3 = 0$, 必须 $X_3 = -1$ 。其条件概率为:

$$P(\xi_3 = 0 | \xi_2 = 0, \xi_1 = -1) = P(X_3 = -1) = \frac{1}{3}$$

显然,

$$P(\xi_3 = 0 | \xi_2 = 0, \xi_1 = 1) \neq P(\xi_3 = 0 | \xi_2 = 0, \xi_1 = -1)$$

这说明 ξ_3 的分布不仅取决于当前状态 ξ_2 , 还取决于过去的状态 ξ_1 。

综上所述, ξ 不满足马尔可夫性, 故不是马氏链。

□

4.4 2023 春第二次小测

1. (18 分) 假设 $N = \{N_t : t \geq 0\}$ 是强度参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程。

(1) (8 分) $\forall 0 < s < t$, 非负整数 $i \leq j$, 求条件概率 $P(N_s = i | N_t = j)$ 。

(2) (10 分) 利用强大数律证明 $P(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda) = 1$ 。

Proof. (1) 利用条件概率的定义以及泊松过程独立增量的性质:

$$\begin{aligned} P(N_s = i | N_t = j) &= \frac{P(N_s = i, N_t = j)}{P(N_t = j)} \\ &= \frac{P(N_s = i, N_t - N_s = j - i)}{P(N_t = j)} \\ &= \frac{P(N_s = i)P(N_t - N_s = j - i)}{P(N_t = j)} \end{aligned}$$

代入参数为 λ 的泊松分布概率公式:

$$\begin{aligned} P(N_s = i | N_t = j) &= \frac{\left(e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^i}{i!}\right) \left(e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}\right)}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}} \\ &= \frac{j!}{i!(j-i)!} \frac{s^i (t-s)^{j-i}}{t^j} \\ &= \binom{j}{i} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{j-i} \end{aligned}$$

这表明在给定 $[0, t]$ 时间内总共发生 j 次事件的条件下, 前 s 时间内发生事件的次数服从二项分布 $B(j, s/t)$ 。

(2) 设 $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ 为该泊松过程相邻两次事件发生的时间间隔。由泊松过程的定义可知, 序列 $\{T_n\}$ 是相互独立的, 且均服从参数为 λ 的指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ 。因此, 期望为 $E[T_n] = \frac{1}{\lambda}$ 。

设 $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ 为第 n 个事件发生的绝对时刻。由于 $\{T_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列且期望有限, 根据柯尔莫戈罗夫强大数定律 (SLLN):

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\lambda}\right) = 1$$

即几乎处处 (a.s.) 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$ 。

而在任意时刻 t , 必然有“第 N_t 个事件已经发生, 而第 $N_t + 1$ 个事件尚未发生”, 有严格的轨道时间不等式:

$$S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$$

将不等式各项同时除以 N_t :

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{S_{N_t+1}}{N_t}$$

对右侧进行恒等变形以构造大数定律的形式:

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}$$

现在, 对不等式两端取 $t \rightarrow \infty$ (等价于 $N_t \rightarrow \infty$) 的极限:

- 左端的极限为: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \frac{1}{\lambda}$ a.s.
- 右端的极限为: $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$ a.s.

根据夹逼定理, 中间项的极限也必然收敛于同一个值:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N_t} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{a.s.}$$

最后两边同时取倒数, 即得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \quad \text{a.s.}$$

从而得证 $P(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda) = 1$ 。 □

2. (8分) 设 $B = \{B_t : t \geq 0\}$ 是一维零初值标准布朗运动。给定常数 $T > 0$, 令 $W_t = B_{T-t} - B_T, \forall t \in [0, T]$ 。证明 $W = \{W_t : t \in [0, T]\}$ 仍是标准布朗运动。

Proof. 要证明 $W = \{W_t : t \in [0, T]\}$ 是标准布朗运动, 我们只需逐一验证标准布朗运动的四条定义性质:

初值为零: 当 $t = 0$ 时, 代入定义式:

$$W_0 = B_{T-0} - B_T = B_T - B_T = 0$$

几乎处处成立 (a.s.)。

轨道连续性: 因为 $\{B_t\}$ 是标准布朗运动, 其样本轨道 $t \mapsto B_t$ 几乎处处连续。 $W_t = B_{T-t} - B_T$ 只是对连续函数进行了时间平移、反转和常数平移, 因此 $t \mapsto W_t$ 在 $[0, T]$ 上依然几乎处处连续。

独立增量性: 对任意的 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$, 考察 W 的相邻增量:

$$W_{t_k} - W_{t_{k-1}} = (B_{T-t_k} - B_T) - (B_{T-t_{k-1}} - B_T) = -(B_{T-t_{k-1}} - B_{T-t_k})$$

观察原布朗运动 B 的时间下标, 由于 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 显然有:

$$T - t_n < T - t_{n-1} < \dots < T - t_2 < T - t_1$$

这说明原布朗运动的增量 $\{B_{T-t_{k-1}} - B_{T-t_k}\}_{k=2}^n$ 对应于时间轴上互不重叠的区间 $[T - t_k, T - t_{k-1}]$ 。根据标准布朗运动 $\{B_t\}$ 的独立增量性, 这些在不重叠区间上的增量是相互独立的。因此, 乘上负号后的增量 $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ 也是相互独立的。

增量服从平稳的正态分布: 对于任意的 $0 \leq s < t \leq T$, 考察增量 $W_t - W_s$:

$$W_t - W_s = -(B_{T-s} - B_{T-t})$$

由于 $0 \leq T - t < T - s \leq T$, 根据 $\{B_t\}$ 的平稳增量性质, 有:

$$B_{T-s} - B_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, (T-s) - (T-t)) = \mathcal{N}(0, t-s)$$

因为正态分布关于原点对称, 随机变量取负号不改变其分布:

$$W_t - W_s = -(B_{T-s} - B_{T-t}) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

综上所述, $W = \{W_t : t \in [0, T]\}$ 也是一个标准布朗运动。 □

3. (24分) 考虑 $M/M/s$ 排队系统。假设顾客按强度参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程到达有 $s > 0$ 个服务员的服务站; 每个顾客在到达时如有服务员空闲就直接接受服务, 否则在队列等待, 然后到首个空闲的服务员处接受服务, 服务结束后离开服务站; 服务员对单个顾客的服务时间相互独立、均服从参数为 $\mu > 0$ 的指数分布, 且与顾客的到达情况独立。 $\forall t \geq 0$, 以 X_t 记 t 时刻服务站中的顾客数。

(1) (8分) 求连续时间参数马氏链 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 的转移速率矩阵 (Q -矩阵)。

(2) (8分) 给出 X 正常返的条件, 并在此条件下求 X 的不变分布。

(3) (8分) $\forall t \geq 0$, 以 Y_t 记时段 $[0, t]$ 内离开服务站的顾客数, 证明当 X 平稳时, $\{Y_t : t \geq 0\}$ 也是具有强度参数 λ 的泊松过程。

Proof. (1) 该排队系统可建模为状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 的生灭过程。状态 n 表示系统中有 n 个顾客。

• **出生率:** 顾客的到达服从参数为 λ 的泊松过程, 因此对任意状态 $n \geq 0$, 到达速率恒为 λ :

$$q_{n,n+1} = \lambda, \quad n \geq 0$$

• **死亡率:** 当系统中的顾客数 $n \leq s$ 时, 有 n 个服务员同时工作, 各自的服务时间服从参数为 μ 的指数分布。系统总的服务完成速率为 $n\mu$:

$$q_{n,n-1} = n\mu, \quad 1 \leq n \leq s$$

当系统中的顾客数 $n > s$ 时, 有 s 个服务员同时工作 (其余顾客在排队), 系统达到最大服务能力, 总的服务完成速率为 $s\mu$:

$$q_{n,n-1} = s\mu, \quad n > s$$

因此，非零的转移速率为：

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1, i \geq 0 \\ i\mu, & j = i - 1, 1 \leq i \leq s \\ s\mu, & j = i - 1, i > s \end{cases}$$

对角线元素为 $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ 。

(2) 设不变分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ 。根据细致平稳条件 $\pi_{n-1}q_{n-1,n} = \pi_nq_{n,n-1}$ ，可得递推关系：

• 当 $1 \leq n \leq s$ 时： $\pi_{n-1}\lambda = \pi_n n\mu \implies \pi_n = \frac{\lambda}{n\mu}\pi_{n-1} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$

• 当 $n > s$ 时： $\pi_{n-1}\lambda = \pi_n s\mu \implies \pi_n = \frac{\lambda}{s\mu}\pi_{n-1} = \frac{1}{s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$

记 $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ 。归一化条件要求 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$ ：

$$1 = \pi_0 \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

无穷级数部分为：

$$\sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k = \frac{(s\rho)^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$$

该几何级数收敛的充要条件是 $\rho < 1$ ，即：

$$\lambda < s\mu$$

这也是系统正常返（排队不会无限增长）的条件。在此条件下，级数求和为 $\frac{1}{1-\rho}$ 。故不变分布为：

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{(s\rho)^n}{n!} \pi_0, & 0 \leq n \leq s \\ \frac{s^s \rho^n}{s!} \pi_0, & n > s \end{cases}$$

(3) 我们通过构造时间反过程来严格证明。

因为马氏链 $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ 处于平稳状态，其边缘分布恒为不变分布 π 。定义它的时间反过程为 $\tilde{X}_t = X_{-t}$ 。根据平稳连续时间马氏链的时间反转定理， $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t : t \in \mathbb{R}\}$ 仍然是一个齐次马氏链，且其转移速率矩阵 $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij})$ 的数学定义为：

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i}$$

对于生灭过程（包括 $M/M/s$ 排队系统），由于状态只能在相邻整数间跳跃，其不变分布 π 必然满足细致平稳条件：

$$\pi_i q_{i,i+1} = \pi_{i+1} q_{i+1,i}, \quad \forall i \geq 0$$

我们将这个条件代入反过程的转移速率方程中进行计算：

• 对于状态增加的跳跃（即反过程的“到达”）， $j = i + 1$ ：

$$\tilde{q}_{i,i+1} = \frac{\pi_{i+1} q_{i+1,i}}{\pi_i}$$

利用细致平稳条件 $\pi_{i+1} q_{i+1,i} = \pi_i q_{i,i+1}$ 替换分子，可得：

$$\tilde{q}_{i,i+1} = \frac{\pi_i q_{i,i+1}}{\pi_i} = q_{i,i+1} = \lambda$$

• 对于状态减少的跳跃（即反过程的“离开”）， $j = i - 1$ ：

$$\tilde{q}_{i,i-1} = \frac{\pi_{i-1} q_{i-1,i}}{\pi_i}$$

同样利用细致平稳条件 $\pi_{i-1} q_{i-1,i} = \pi_i q_{i,i-1}$ 替换分子，可得：

$$\tilde{q}_{i,i-1} = \frac{\pi_i q_{i,i-1}}{\pi_i} = q_{i,i-1} = \mu_i$$

（其中当 $i \leq s$ 时 $\mu_i = i\mu$ ，当 $i > s$ 时 $\mu_i = s\mu$ ）。

对于所有不相邻的状态, $q_{ji} = 0$, 自然有 $\tilde{q}_{ij} = 0$ 。因此, 反转过程 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 矩阵的每一个元素都精确等于原过程 \mathbf{Q} 矩阵的对应元素。这意味着 \tilde{X}_t 在统计规律上是一个与原过程完全相同的 $M/M/s$ 排队系统。

在反转过程 \tilde{X} 中, 它的“到达”对应于状态的增加: $\tilde{X}_t \rightarrow \tilde{X}_t + 1$ 。因为 \tilde{X} 是标准的 $M/M/s$ 过程, 其到达速率 $\tilde{q}_{i,i+1} \equiv \lambda$ 且与当前状态无关, 所以 \tilde{X} 的“到达过程”构成一个强度为 λ 的泊松过程。

现在, 我们考察原过程 X 的离开过程。在原过程 X 中, 时刻 u 发生“离开”意味着状态减少: $X_{u-} \rightarrow X_{u-} - 1$ 。将时间变量替换为 $u = -t$, 映射到时间反转过程 $\tilde{X}_t = X_{-t}$ 中。由于时间箭头的反转:

$$\tilde{X}_{t-} = X_{(-t)+} = X_{-t} - 1$$

$$\tilde{X}_t = X_{-t}$$

也就是说, 反转过程在时刻 t 发生了从状态 $k - 1$ 到 k 的跳跃。

这在数学上建立了一一对应: 原过程 X 在时刻 u 发生一次“离开”, 当且仅当反转过程 \tilde{X} 在时刻 $-u$ 发生一次“到达”。

既然反转过程 \tilde{X} 的“到达”是一个强度为 λ 的泊松过程, 那么在时间轴上倒置的、与之精确对应的原过程 X 的“离开”也必定是一个强度为 λ 的泊松过程。因此, 在时段 $[0, t]$ 内离开服务站的顾客数 Y_t 构成强度为 λ 的泊松过程。 \square

4.5 2024 秋期末

1. (14 分) 离散时间马氏链的状态空间 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵 \mathbf{P} 与往年题类似。

(1) (7 分) 设 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0.5$, 求 $P(X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 2)$ 。

(2) (7 分) 求不变分布 π (参考结果: $\pi = (\frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24})$) 以及求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ 。

2. (10 分) (简单题, 具体内容未知)

3. (10 分) 设 $\{X_n\}$ 为不可约正常返马氏链, π 为其平稳分布。对任意状态 i, j , 定义 $\sigma = \inf\{n \geq m : X_n = i\}$ (其中 m 是预先给定的常数)。证明:

$$E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} I_{\{X_n=j\}} = \pi_j E_i \sigma.$$

Proof. 不失一般性, 假设 $m \geq 1$ (若 $m = 0$, 则因 $X_0 = i$ 有 $\sigma = 0$, 等式两边均为 0, 平凡成立)。令 $\nu_j = E_i \left[\sum_{n=0}^{\sigma-1} I_{\{X_n=j\}} \right]$, 表示在停时 σ 之前访问状态 j 的期望次数。利用期望的线性性质, 将其转化为概率的级数求和:

$$\nu_j = E_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{X_n=j, \sigma > n\}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j, \sigma > n)$$

第一步: 证明 $\nu = (\nu_j)_{j \in S}$ 构成该马氏链的一个不变测度

验证 $\nu \mathbf{P} = \nu$ 。考虑其第 j 个分量:

$$\sum_{k \in S} \nu_k p_{kj} = \sum_{k \in S} \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = k, \sigma > n) p_{kj} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in S} P_i(X_n = k, \sigma > n) p_{kj}$$

因为事件 $\{\sigma > n\}$ 仅由时刻 0 到 n 的轨道决定, 由马尔可夫性:

$$\sum_{k \in S} P_i(X_n = k, \sigma > n) p_{kj} = P_i(X_{n+1} = j, \sigma > n)$$

代回原式, 并令 $t = n + 1$, 求和下标从 1 开始:

$$\sum_{k \in S} \nu_k p_{kj} = \sum_{t=1}^{\infty} P_i(X_t = j, \sigma \geq t)$$

将 $\{\sigma \geq t\}$ 拆分为互斥的 $\{\sigma > t\}$ 与 $\{\sigma = t\}$:

$$\sum_{k \in S} \nu_k p_{kj} = \sum_{t=1}^{\infty} P_i(X_t = j, \sigma > t) + \sum_{t=1}^{\infty} P_i(X_t = j, \sigma = t)$$

1. 第一个求和项:

$$\sum_{t=1}^{\infty} P_i(X_t = j, \sigma > t) = \sum_{t=0}^{\infty} P_i(X_t = j, \sigma > t) - P_i(X_0 = j, \sigma > 0)$$

前面部分即为 ν_j 。对于后面部分, 由于 $m \geq 1$, 且 $\sigma \geq m$, 故必然有 $\sigma > 0$ 恒成立; 又因初始分布为 $X_0 = i$, 所以 $P_i(X_0 = j) = \delta_{ij}$ 。因此第一部分等于 $\nu_j - \delta_{ij}$ 。

2. 第二个求和项: 根据定义 $\sigma = \inf\{n \geq m : X_n = i\}$, 若事件 $\sigma = t$ 发生, 马氏链在时刻 t 必定处于状态 i , 即 $X_t = i$ 。因此, 若 $j \neq i$, $P_i(X_t = j, \sigma = t) = 0$; 若 $j = i$, $P_i(X_t = i, \sigma = t) = P_i(\sigma = t)$ 。由于马氏链正常返, 必定会在 m 步之后无穷多次回到 i , 故 $P_i(\sigma < \infty) = 1$, 即 $\sum_{t=1}^{\infty} P_i(\sigma = t) = 1$ 。因此第二部分等于 δ_{ij} 。

将两部分相加:

$$\sum_{k \in S} \nu_k p_{kj} = (\nu_j - \delta_{ij}) + \delta_{ij} = \nu_j$$

这严格证明了 ν 满足平稳方程, 是一个不变测度。

第二步：利用平稳分布的唯一性

不可约正常返马氏链的不变测度唯一（相差一个常数倍）。已知 π 为其平稳概率分布，故存在常数 C 使得：

$$\nu_j = C\pi_j, \quad \forall j \in S$$

对等式两边遍历状态空间 S 求和。左边：

$$\sum_{j \in S} \nu_j = \sum_{j \in S} E_i \left[\sum_{n=0}^{\sigma-1} I_{\{X_n=j\}} \right] = E_i \left[\sum_{n=0}^{\sigma-1} \sum_{j \in S} I_{\{X_n=j\}} \right]$$

因为在任意时刻 n ，马氏链必定只处于某一个状态，所以 $\sum_{j \in S} I_{\{X_n=j\}} = 1$ 。从而 $\sum_{j \in S} \nu_j = E_i \left[\sum_{n=0}^{\sigma-1} 1 \right] = E_i \sigma$ 。而右边为 $\sum_{j \in S} C\pi_j = C \cdot 1 = C$ 。故 $C = E_i \sigma$ ，代回原式即得：

$$E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} I_{\{X_n=j\}} = \pi_j E_i \sigma$$

□

4. (14分) 顾客按强度为 λ 的泊松过程到达，在时刻 t 时所有顾客一并被接走。

(1) (7分) 求第 n 个顾客到达时刻 $S_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$ 的概率密度。

(2) (7分) 求直到时刻 t 为止，所有顾客的总等待时长 $W(t)$ 的期望。

Proof. (1) 在泊松过程中，相继两次到达的时间间隔 $\eta_k = S_k - S_{k-1}$ （约定 $S_0 = 0$ ）是独立同分布的，且均服从参数为 λ 的指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ 。因此，第 n 个顾客的到达时刻 $S_n = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$ 是 n 个独立同分布的指数随机变量之和， S_n 服从参数为 (n, λ) 的伽马分布，其概率密度函数为：

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

我们也可以通过泊松过程的物理意义直接推导。事件 $\{x < S_n \leq x + dx\}$ 发生的等价条件是：在 $[0, x]$ 时间内恰好有 $n-1$ 个顾客到达，并且在 $(x, x+dx]$ 这个无穷小时间段内恰好有 1 个顾客到达。这两个事件是独立的，因此概率为：

$$P(x < S_n \leq x + dx) = P(N_x = n-1) \cdot P(\text{在}(x, x+dx] \text{内到达} 1 \text{人})$$

$$f_{S_n}(x)dx = \left(e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \cdot (\lambda dx)$$

两边约去 dx ，即可得到上述密度函数。

(2) 对于在时刻 t 之前到达的第 i 个顾客，其到达时刻为 S_i ，由于所有顾客都在时刻 t 一并被接走，所以第 i 个顾客的等待时间为 $t - S_i$ 。如果在 $[0, t]$ 内总共有 N_t 个顾客到达，那么总等待时长为：

$$W(t) = \sum_{i=1}^{N_t} (t - S_i)$$

利用全概率公式，我们对 $[0, t]$ 内到达的总人数 $N_t = n$ 进行条件展开：

$$E[W(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[W(t) | N_t = n] P(N_t = n)$$

注意 $n=0$ 时总等待时间为 0，所以从 1 开始求和。

根据泊松过程的条件均匀性：给定在区间 $[0, t]$ 内总共发生了 n 次事件（即 $N_t = n$ ），这 n 个事件的发生时刻 S_1, S_2, \dots, S_n 的联合分布，与 n 个在 $(0, t)$ 上服从均匀分布 $U(0, t)$ 的独立随机变量的次序统计量的联合分布完

全相同。因此，条件期望可以直接转化为对独立均匀分布的求和，次序在求和中不影响期望的线性性质：

$$\begin{aligned}
 E[W(t) | N_t = n] &= E \left[\sum_{i=1}^n (t - S_i) \mid N_t = n \right] \\
 &= E \left[\sum_{i=1}^n (t - U_{(i)}) \right] \quad (U_{(i)} \text{ 为均匀分布的次序统计量}) \\
 &= E \left[\sum_{i=1}^n (t - U_i) \right] \quad (\text{求和与排序无关, } U_i \sim U(0, t)) \\
 &= \sum_{i=1}^n E[t - U_i]
 \end{aligned}$$

因为 U_i 在 $(0, t)$ 上均匀分布，故其期望 $E[U_i] = \frac{t}{2}$ 。代入可得：

$$E[W(t) | N_t = n] = \sum_{i=1}^n \left(t - \frac{t}{2} \right) = n \frac{t}{2}$$

将这个条件期望代回全概率展开式中：

$$\begin{aligned}
 E[W(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{n} \left(n \frac{t}{2} \right) P(N_t = n) \\
 &= \frac{t}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n P(N_t = n) \\
 &= \frac{t}{2} E[N_t]
 \end{aligned}$$

已知泊松过程的期望 $E[N_t] = \lambda t$ ，最终求得总等待时长的期望为：

$$E[W(t)] = \frac{t}{2} \cdot \lambda t = \frac{1}{2} \lambda t^2$$

□

5. (21 分) 考虑 $M/M/s$ 排队系统（类似于 $M/M/1$ 的推广），每个服务员的服务时间服从 $\text{Exp}(\mu)$ ，顾客到达强度为 λ 。

- (1) 求其转移速率矩阵 \mathbf{Q} 。
- (2) 给出过程正常返的条件，并在此条件下求平稳分布 π 。
- (3) 证明在平稳状态下，离开人数过程 $\{Y_t\}$ 也是强度为 λ 的泊松过程。

Proof. 同 2023 年第二次小测第 3 题。

□

6. (31 分) 布朗运动与随机分析。

- (1) (7 分) 已知 $B_1 = 0$ （布朗桥），求 (B_s, B_t) 的联合密度， $0 < s < t < 1$ 。
- (2) (7 分) 证明 $W_t = tB_{1/t}$ 也是标准布朗运动。
- (3) (7 分) 计算 Itô 积分：对于 $\psi(t, x) = tx^3$ （其中 $x = B_t$ ），求 $d(tB_t^3)$ 的展开式。
- (4) (10 分) 设 $X_t = e^{-\alpha t} B_{e^{2\alpha t}}$ （Ornstein-Uhlenbeck 过程的一种形式），证明 X_t 是时齐马氏链并求其无穷小算子或速率相关性质。

Proof. (1) 要计算的是条件概率密度 $p(x, y | B_1 = 0)$ ，其中 $B_s = x, B_t = y$ ，且 $0 < s < t < 1$ 。根据条件概率密度公式：

$$p_{B_s, B_t | B_1}(x, y | 0) = \frac{p_{B_s, B_t, B_1}(x, y, 0)}{p_{B_1}(0)}$$

已知无条件下的联合分布可以通过独立增量拆解。增量 $B_s, B_t - B_s, B_1 - B_t$ 相互独立，且分别服从 $N(0, s), N(0, t - s), N(0, 1 - t)$ 。所以联合密度为：

$$p_{B_s, B_t, B_1}(x, y, 0) = p_{B_s}(x) \cdot p_{B_t - B_s}(y - x) \cdot p_{B_1 - B_t}(0 - y)$$

即：

$$\begin{aligned} p_{B_s, B_t, B_1}(x, y, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(1-t)}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{s(t-s)(1-t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s} - \frac{(y-x)^2}{2(t-s)} - \frac{y^2}{2(1-t)}\right) \end{aligned}$$

而边缘密度 $p_{B_1}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 。相除即可得到条件密度：

$$p(x, y | 0) = \frac{1}{2\pi \sqrt{s(t-s)(1-t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s} - \frac{(y-x)^2}{2(t-s)} - \frac{y^2}{2(1-t)}\right)$$

(2) 令 $W_t = tB_{1/t}$ 对 $t > 0$ ，并补充定义 $W_0 = 0$ 。显然 $\{W_t\}$ 是高斯过程。

验证均值：对于 $t > 0$ ， $E[W_t] = tE[B_{1/t}] = 0$ 。 $E[W_0] = 0$ 。

验证协方差：任取 $0 < s < t$ 。注意到 $\frac{1}{t} < \frac{1}{s}$ ：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t) &= E[W_s W_t] = E[(sB_{1/s})(tB_{1/t})] \\ &= stE[B_{1/s} B_{1/t}] = st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) \\ &= st \left(\frac{1}{t}\right) = s = \min(s, t) \end{aligned}$$

验证连续性：当 $t > 0$ 时，由于 B 的轨道连续，复合函数 W_t 显然连续。只需验证 $t = 0$ 处的几乎必然连续性，即证明 $\lim_{t \rightarrow 0+} tB_{1/t} = 0$ a.s.

令 $u = 1/t$ ，当 $t \rightarrow 0+$ 时， $u \rightarrow \infty$ 。根据布朗运动的大数定律： $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{B_u}{u} = 0$ a.s. 所以 $\lim_{t \rightarrow 0+} W_t = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{B_u}{u} = 0 = W_0$ a.s.

综上， $\{W_t\}$ 是均值为 0，协方差为 $\min(s, t)$ 且几乎必然连续的高斯过程，故其是标准布朗运动。

(3) 令二元函数 $g(t, x) = tx^3$ 。因为该函数存在连续的二阶偏导数，我们应用 Itô 公式。计算偏导数：

$$\frac{\partial g}{\partial t} = x^3, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 3tx^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6tx$$

对随机过程 $g(t, B_t) = tB_t^3$ 应用 Itô 公式：

$$d(tB_t^3) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dB_t)^2$$

将偏导数代入，并利用布朗运动二次变差性质 $(dB_t)^2 = dt$ ：

$$\begin{aligned} d(tB_t^3) &= B_t^3 dt + 3tB_t^2 dB_t + \frac{1}{2}(6tB_t)dt \\ &= (B_t^3 + 3tB_t)dt + 3tB_t^2 dB_t \end{aligned}$$

(4) 已知 X_t 是通过对标准布朗运动进行确定的时间尺度和空间尺度变换得到的。由于布朗运动是马氏过程，这种单调的时间代换和确定的空间缩放必然保留马氏性。

进一步验证其转移规律。设 $s < t$ 。考察给定历史 \mathcal{F}_s 时， X_t 的条件分布。由于 $X_s = e^{-\alpha s} B_{e^{2\alpha s}}$ ：

$$X_t = e^{-\alpha t} B_{e^{2\alpha t}} = e^{-\alpha t} (B_{e^{2\alpha s}} + (B_{e^{2\alpha t}} - B_{e^{2\alpha s}}))$$

由于布朗运动的独立增量性，增量 $\Delta B = B_{e^{2\alpha t}} - B_{e^{2\alpha s}}$ 独立于时刻 $e^{2\alpha s}$ 之前的所有信息，自然独立于 \mathcal{F}_s （从而独立于 X_s ）。将 $B_{e^{2\alpha s}}$ 用 X_s 替换： $B_{e^{2\alpha s}} = e^{\alpha s} X_s$ 。

$$X_t = e^{-\alpha t} (e^{\alpha s} X_s + \Delta B) = e^{-\alpha(t-s)} X_s + e^{-\alpha t} \Delta B$$

其中，独立增量 $\Delta B \sim N(0, e^{2\alpha t} - e^{2\alpha s})$ 。因此，条件随机变量 $(X_t | \mathcal{F}_s)$ 是高斯分布，且只依赖于当前状态 X_s 。这证明了 X_t 是马氏过程。并且条件方差为：

$$\text{Var}(X_t | X_s) = (e^{-\alpha t})^2 \text{Var}(\Delta B) = e^{-2\alpha t} (e^{2\alpha t} - e^{2\alpha s}) = 1 - e^{-2\alpha(t-s)}$$

条件均值为: $E[X_t | X_s] = X_s e^{-\alpha(t-s)}$ 。

由于条件均值和方差都只依赖于时间间隔 $t - s$, 转移分布是时齐的。

求生成算子: 利用一阶泰勒展开看无穷小增量: 漂移系数:

$$b(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E[X_{t+\delta} - X_t | X_t = x]}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x e^{-\alpha\delta} - x}{\delta} = x(-\alpha) = -\alpha x$$

扩散系数 (方差系数):

$$a(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Var}(X_{t+\delta} | X_t = x)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2\alpha\delta}}{\delta} = 2\alpha$$

根据扩散过程生成算子的一般形式 $L = b(x) \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} a(x) \frac{d^2}{dx^2}$, 所以无穷小算子为:

$$L = -\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

□

4.6 2025 秋期末

1. 已知状态空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 马尔可夫链的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/6 & 1/12 & 1/6 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

求:

- (1) $P(X_2 = 1 | X_0 = 5)$;
- (2) 该马尔可夫链的所有不变分布;
- (3) 记集合 $A = \{1, 2\}$, 求 $P_5(\sigma_A < \infty)$ 与 $P_6(\sigma_A < \infty)$ 。

Proof. (1) 这等价于求两步转移概率矩阵中对应的元素 $p_{51}^{(2)}$ 。根据 Chapman-Kolmogorov 方程:

$$p_{51}^{(2)} = \sum_{k=1}^6 p_{5k} p_{k1}$$

代入计算:

$$\begin{aligned} p_{51}^{(2)} &= p_{51}p_{11} + p_{52}p_{21} + p_{53}p_{31} + p_{54}p_{41} + p_{55}p_{51} + p_{56}p_{61} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 0 + 0 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{48} + \frac{1}{32} = \frac{4}{96} + \frac{24}{96} + \frac{2}{96} + \frac{3}{96} = \frac{33}{96} = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

故 $P(X_2 = 1 | X_0 = 5) = \frac{11}{32}$ 。

(2) 分析状态空间的结构: 集合 $C_1 = \{1, 2\}$ 和 $C_2 = \{3, 4\}$ 是两个不相交的闭集 (吸收类), 且在其内部均不可约; 集合 $T = \{5, 6\}$ 为非常返状态 (瞬态)。不变分布的非零元素只能集中在正常返闭集 C_1 和 C_2 上。

分别求两个闭集上的局部不变分布: 对于 C_1 , 解方程组 $(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2)$, 且 $\pi_1 + \pi_2 = 1$ 。显然由于对称性, 解得 $\pi^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$ 。

对于 C_2 , 解方程组 $(\pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (\pi_3, \pi_4)$, 且 $\pi_3 + \pi_4 = 1$ 。同理解得 $\pi^{(2)} = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ 。

由于瞬态的状态在平稳分布中概率必为 0, 故该马尔可夫链的所有不变分布为上述两个极值不变分布的凸组合。即对于任意 $\alpha \in [0, 1]$, 不变分布为:

$$\pi = \alpha\pi^{(1)} + (1 - \alpha)\pi^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1 - \alpha}{2}, \frac{1 - \alpha}{2}, 0, 0\right)$$

(3) 记 $u_i = P_i(\sigma_A < \infty)$, 表示从状态 i 出发最终进入集合 $A = \{1, 2\}$ 的概率。根据首步分析法 (吸收概率方程), u_i 满足:

$$u_i = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \in T} p_{ij} u_j, \quad \forall i \in T$$

若进入集合 $\{3, 4\}$, 则永远无法到达 A , 对应的吸收概率为 0。

对于瞬态 $i = 5, 6$, 列出方程:

$$\begin{cases} u_5 = (p_{51} + p_{52}) + p_{55}u_5 + p_{56}u_6 \\ u_6 = (p_{61} + p_{62}) + p_{65}u_5 + p_{66}u_6 \end{cases}$$

代入矩阵 P 中的具体数值:

$$\begin{cases} u_5 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}u_5 + \frac{1}{8}u_6 \\ u_6 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4}u_5 + \frac{1}{12}u_6 \end{cases}$$

化简上述方程组:

$$\begin{cases} u_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}u_5 + \frac{1}{8}u_6 \implies 8u_5 = 4 + u_5 + u_6 \implies 7u_5 - u_6 = 4 \\ u_6 = \frac{5}{12} + \frac{1}{4}u_5 + \frac{1}{12}u_6 \implies 12u_6 = 5 + 3u_5 + u_6 \implies 11u_6 - 3u_5 = 5 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} u_5 = \frac{49}{74} \\ u_6 = \frac{47}{74} \end{cases}$$

故 $P_5(\sigma_A < \infty) = \frac{49}{74}$, $P_6(\sigma_A < \infty) = \frac{47}{74}$. □

2. 设泊松过程 $\{N(t)\}$ 的参数为 λ , 利用大数定律证明 $P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda\right) = 1$.

Proof. 同 2022 年第 2 题. □

3. 设 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 为连续时间参数的时齐马氏链, 取值空间 $S = \{0, 1\}$. 设 $\tau = \inf\{t : X_t \neq X_0\}$, 且 $P(\tau > t | X_0 = 0) = e^{-\lambda t}$, $P(\tau > t | X_0 = 1) = e^{-\mu t}$.

- (1) 求 X 的转移速率矩阵 \mathbf{Q} , 并写出 $p_{00}(t), p_{11}(t)$ 满足的 Kolmogorov 前进方程;
- (2) $\forall t > 0, i, j \in S$, 求 $p_{ij}(t)$.

Proof. 同 2019 年第 3 题. □

4. 设 S 是可数状态集, $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是离散时齐马氏链, 状态转移矩阵为 $P = (p_{ij})$, $o \in S$ 是正常返状态. 记

$$u_j = E\left(\sum_{k=0}^{\sigma_o-1} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}\right),$$

证明 $\mathbf{u} = (u_j)$ 是 X 的不变测度.

Proof. 不妨设初始状态为 $X_0 = o$. 令 $\sigma_o = \inf\{n \geq 1 : X_n = o\}$ 为系统离开 o 后首次回到状态 o 的时间. u_j 表示在一个回访周期内 (从时刻 0 到 $\sigma_o - 1$), 系统处于状态 j 的期望次数. 我们可以用示性函数的期望将其写为无穷级数的形式:

$$u_j = E_o\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k=j, \sigma_o > k\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P_o(X_k = j, \sigma_o > k)$$

要证明 $\mathbf{u} = (u_j)$ 是不变测度, 我们需要证明对任意的 $j \in S$, 满足全局平衡方程 $\mathbf{u}P = \mathbf{u}$, 即:

$$\sum_{i \in S} u_i p_{ij} = u_j$$

我们将 u_i 的级数形式代入左边:

$$\sum_{i \in S} u_i p_{ij} = \sum_{i \in S} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_o(X_k = i, \sigma_o > k) \right) P(X_{k+1} = j | X_k = i)$$

因为事件 $\{\sigma_o > k\}$ 意味着前 k 步没有回到 o (即 $X_1 \neq o, \dots, X_k \neq o$), 它仅依赖于 0 到 k 时刻的历史轨迹. 根据马氏性, 给定 $X_k = i$ 时, 系统下一步跳到 j 的概率与之前的历史无关. 因此:

$$P_o(X_k = i, \sigma_o > k) P(X_{k+1} = j | X_k = i) = P_o(X_k = i, X_{k+1} = j, \sigma_o > k)$$

代入原式, 并交换求和次序, 对 i 求边缘分布:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} u_i p_{ij} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i \in S} P_o(X_k = i, X_{k+1} = j, \sigma_o > k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_o(X_{k+1} = j, \sigma_o > k) \end{aligned}$$

令 $m = k + 1$, 由于 $\{\sigma_o > k\}$ 等价于 $\{\sigma_o \geq k + 1\}$ 即 $\{\sigma_o \geq m\}$, 我们将求和指标替换为 m :

$$\sum_{i \in S} u_i p_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} P_o(X_m = j, \sigma_o \geq m)$$

接下来, 我们按目标状态 j 是否为初始状态 o 分为两种情况讨论:

情形 1: $j \neq o$

如果 $X_m = j$, 由于 $j \neq o$, 说明时刻 m 并没有回到 o 。因此, 条件 $\sigma_o \geq m$ 实际上可以加强为 $\sigma_o > m$ 。即事件 $\{X_m = j, \sigma_o \geq m\} = \{X_m = j, \sigma_o > m\}$ 。代入上面的等式:

$$\sum_{i \in S} u_i p_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} P_o(X_m = j, \sigma_o > m)$$

这与 u_j 的定义 $\sum_{m=0}^{\infty} P_o(X_m = j, \sigma_o > m)$ 相比, 仅缺少了 $m = 0$ 这一项。而 $P_o(X_0 = j, \sigma_o > 0) = P_o(o = j, \sigma_o > 0) = 0$ 。所以:

$$\sum_{i \in S} u_i p_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} P_o(X_m = j, \sigma_o > m) = u_j$$

情形 2: $j = o$

如果时刻 m 状态为 o (即 $X_m = o$), 且 $\sigma_o \geq m$, 这就意味着 m 时刻正是离开起点后首次回到 o 的时刻。即事件 $\{X_m = o, \sigma_o \geq m\} = \{\sigma_o = m\}$ 。代入等式:

$$\sum_{i \in S} u_i p_{io} = \sum_{m=1}^{\infty} P_o(\sigma_o = m) = P_o(\sigma_o < \infty)$$

因为状态 o 是正常返的, 所以从 o 出发回到 o 的概率为 1, 即 $P_o(\sigma_o < \infty) = 1$ 。另一方面, 根据 u_o 的定义:

$$u_o = \sum_{k=0}^{\infty} P_o(X_k = o, \sigma_o > k)$$

当 $k = 0$ 时, $P_o(X_0 = o, \sigma_o > 0) = 1$ 。当 $k \geq 1$ 时, 如果 $X_k = o$, 则必定有 $\sigma_o \leq k$, 这与条件 $\sigma_o > k$ 矛盾, 因此概率为 0。所以 $u_o = 1$ 。从而得到:

$$\sum_{i \in S} u_i p_{io} = 1 = u_o$$

综上所述, 无论 j 是否等于 o , 均有 $\sum_{i \in S} u_i p_{ij} = u_j$ 成立。 $\mathbf{u} = (u_j)$ 是马氏链 X 的不变测度。 \square

5. 设 $N = \{N_t : t \geq 0\}$ 为参数为 λ 的泊松过程, $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ 为与 N 独立的离散时间参数时齐马氏链, 取值于整数集 \mathbb{Z} , 转移概率矩阵为 $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{ij})_{i, j \in \mathbb{Z}}$ 。设 $X = \{X_t : t \geq 0\}$, 其中 $X_t = Y_{N_t}$ 。证明 X 为时齐马氏链, 并求其转移速率矩阵 \mathbf{Q} 和转移概率矩阵 \mathbf{P} 。

Proof. 同 2019 年第 4 题。 \square

6. 设 $B = \{B_t, t \geq 0\}$ 为 0 均值一维标准布朗运动, $f(t)$ 是连续可微函数。记 $Y_t = \int_0^t s B_s dB_s$ 。

(1) 求 (B_r, B_s, B_t) 的联合密度 (其中 $r < s < t$);

(2) 证明 $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} B_{\lambda t}, t \geq 0\}$ 也是标准布朗运动;

(3) 求 $M_t = \int_0^t f(s) dB_s$ 的分布;

(4) 证明: $Y_t = \frac{1}{2} \left[t B_t^2 - \int_0^t (B_s^2 + s) ds \right]$ 。

Proof. (1) 利用布朗运动的独立增量性质, 我们可以将联合分布转化为三个独立正态增量的乘积。

设 $Z_1 = B_r, Z_2 = B_s - B_r, Z_3 = B_t - B_s$ 。由标准布朗运动定义知, 它们相互独立, 且分别服从:

$Z_1 \sim N(0, r)$, 其密度为 $p_{Z_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left(-\frac{x^2}{2r}\right)$

$Z_2 \sim N(0, s-r)$, 其密度为 $p_{Z_2}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-r)}} \exp\left(-\frac{u^2}{2(s-r)}\right)$

$Z_3 \sim N(0, t-s)$, 其密度为 $p_{Z_3}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{v^2}{2(t-s)}\right)$

由于它们独立, 联合密度为 $f_{Z_1, Z_2, Z_3}(x, u, v) = p_{Z_1}(x)p_{Z_2}(u)p_{Z_3}(v)$ 。

令原变量为 $x = B_r, y = B_s, z = B_t$, 则对应的线性变换为 $u = y - x$ 且 $v = z - y$ 。

该线性变换的雅可比行列式的绝对值为 1。因此, 联合密度函数即为直接代入后的结果:

$$\begin{aligned} f_{B_r, B_s, B_t}(x, y, z) &= p_{Z_1}(x)p_{Z_2}(y-x)p_{Z_3}(z-y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{r(s-r)(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2r} - \frac{(y-x)^2}{2(s-r)} - \frac{(z-y)^2}{2(t-s)}\right) \end{aligned}$$

(2) 令 $W_t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}$, 且约定 $\lambda > 0$ 。显然, 作为高斯过程的线性缩放变换, $\{W_t\}$ 依然是高斯过程。

验证均值: 对任意 $t \geq 0$, $E[W_t] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}E[B_{\lambda t}] = 0$ 。

验证协方差: 任取 $0 \leq s \leq t$, 则 $\lambda s \leq \lambda t$ 。

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t) &= E[W_s W_t] = \frac{1}{\lambda}E[B_{\lambda s} B_{\lambda t}] \\ &= \frac{1}{\lambda} \min(\lambda s, \lambda t) = \frac{1}{\lambda}(\lambda s) \\ &= s = \min(s, t) \end{aligned}$$

验证连续性与初值: 因为布朗运动 B 的轨道连续, 且时间变换 $t \mapsto \lambda t$ 是连续的, 所以复合过程 W_t 轨道几乎必然连续。且 $W_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_0 = 0$ 。

综上所述, $\{W_t\}$ 是均值为 0、协方差为 $\min(s, t)$ 且轨道几乎处处连续的高斯过程, 故其是标准布朗运动。

(3) 已知 $f(s)$ 是连续可微的确定性函数, 故其在闭区间 $[0, t]$ 上必然平方可积, 即 $\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$ 。由于被积函数为确定性函数, 该随机积分 (Wiener 积分) 作为高斯过程的线性泛函, 其结果必然服从正态分布。

求均值: 根据 Itô 积分的零期望性质 (鞅性质),

$$E[M_t] = E\left[\int_0^t f(s)dB_s\right] = 0$$

求方差: 根据 Itô 等距同构 (Itô Isometry),

$$\text{Var}(M_t) = E[M_t^2] = E\left[\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)^2\right] = \int_0^t E[f(s)^2]ds = \int_0^t f(s)^2 ds$$

因此, M_t 的概率分布为:

$$M_t \sim N\left(0, \int_0^t f(s)^2 ds\right)$$

(4) 令二元函数 $g(x, t) = tx^2$ 。该函数连续可微。对随机过程 $g(B_t, t) = tB_t^2$ 应用 Itô 公式。首先计算偏导数:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = x^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2tx, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2t$$

根据 Itô 公式:

$$d(tB_t^2) = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dB_t)^2$$

代入偏导数, 并利用二次变差 $(dB_t)^2 = dt$:

$$\begin{aligned} d(tB_t^2) &= B_t^2 dt + 2tB_t dB_t + \frac{1}{2}(2t)dt \\ &= (B_t^2 + t)dt + 2tB_t dB_t \end{aligned}$$

对等式两端在区间 $[0, t]$ 上进行积分。注意到初值 $sB_s^2|_{s=0} = 0$:

$$tB_t^2 = \int_0^t (B_s^2 + s)ds + \int_0^t 2sB_s dB_s$$

将右侧的常数 2 提出积分号, 并注意到 $Y_t = \int_0^t sB_s dB_s$:

$$tB_t^2 = \int_0^t (B_s^2 + s)ds + 2Y_t$$

通过移项, 将 Y_t 单独留在等式一侧, 同除以 2 即可得到所需证明的等式:

$$Y_t = \frac{1}{2}\left[tB_t^2 - \int_0^t (B_s^2 + s)ds\right]$$

□

4.7 2026 春第一次小测

1. (17 分) 已知状态空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 马尔可夫链的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

求:

- (1) 已知 $P(X_0 = 5) = \frac{1}{3}$, $P(X_2 = 1 | X_0 = 5) = \frac{2}{3}$, 求 $P(X_0 = 6, X_2 = 3)$;
- (2) 该马氏链状态空间中, 有哪几个连通集, 其中哪个是常返类, 哪个是暂态类;
- (3) 记集合 $A = \{1, 2\}$, 求 $P_5(\sigma_A < \infty)$ 与 $P_6(\sigma_A < \infty)$ 。

2. (8 分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取值于可数集 S 的离散时间参数马氏链。证明: $\forall n \geq 1, i, j \in S, B_k \subset S (0 \leq k \leq n-1)$, 有

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

3. (9 分) 对任意 $i, j \in S$, 令 $f_{ij} := P_i(\tau_j < \infty)$, $G_{ij} := \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j)$ 。证明:

$$G_{ij} = \delta_{ij} + f_{ij}G_{jj}$$

(其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号, 当 $i = j$ 时为 1, 否则为 0)。

4. (8 分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 的马尔可夫链。假设系统在每一步只能向相邻状态转移, 记向右转移的概率为 b_i , 向左转移的概率为 d_i , 且满足 $b_i + d_i = 1$ (在边界状态 0 处, 约定 $d_0 = 0, b_0 = 1$)。单步转移概率为:

- $p_{i,i+1} = b_i \quad (i \geq 0)$
- $p_{i,i-1} = d_i \quad (i \geq 1)$

且对其余状态有 $p_{i,j} = 0$ 。我们称该链为生灭链。

假设该链是不可约的 (即对所有 $i \geq 1$ 均有 $0 < b_i < 1$)。试给出其为正常返的充要条件, 并严谨证明。

5. (8 分) 设 $\{X_n : n \geq 0\}$ 是独立同分布随机变量列, 服从分布: $P(X_n = 1) = \frac{2}{3}, P(X_n = -1) = \frac{1}{3}$ 。定义滑动平均

$$\xi_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1}), \forall n \geq 1.$$

$\xi = \{\xi_n : n \geq 1\}$ 是否是马氏链? 为什么?

4.8 2026 春第二次小测

1. (25 分) 假设 $N = \{N_t : t \geq 0\}$ 是强度参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程。

(1) (7 分) $\forall 0 < s < t$, 非负整数 $i \leq j$, 求条件概率 $P(N_s = i | N_t = j)$ 。

(2) (9 分) 利用强大数律证明 $P(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda) = 1$ 。

(3) (9 分) 设 $Y = \{Y_n : n \geq 0\}$ 是取值于可数集 S 的离散时间参数时齐马氏链, 一步转移概率矩阵为 $\hat{\mathbb{P}} = (\hat{p}_{ij})_{i,j \in S}$; N 与 Y 相互独立。 $\forall t \geq 0$, 令 $X_t = Y_{N_t}$ 。证明 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 是连续时间参数时齐马氏链, 并求出其转移概率矩阵 $\mathbb{P}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in S}$, $\forall t \geq 0$ 。

2. (25 分) 设连续时间参数时齐马氏链 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 的状态空间 S 可数, 转移概率矩阵 $\mathbb{P}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in S}$ 在 $t = 0$ 处右连续, 转移速率矩阵 $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ 保守非爆炸。

(1) (8 分) 证明 $\forall i \neq j \in S$, 存在 $t > 0$ 使得 $p_{ij}(t) > 0$ 当且仅当对于 X 的嵌入链, i 可达 j 。

(2) (9 分) 证明 $\forall i \in S$, i 是 X 的常返态当且仅当 $\forall \delta > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n\delta) = \infty$ 。

(3) (8 分) 证明: 当 S 为有限集、 X 不可约时, 0 是 \mathbb{Q} 的特征值, 而 \mathbb{Q} 的其它特征值的实部小于 0 。
(提示: 可利用下列 Perron-Frobenius 定理: 不可约非周期转移概率矩阵的特征值中, 模最大的特征值为 1 , 其余特征值的模小于 1 。)